# 2 I MODELLI ECONOMETRICI E LA LORO COSTRUZIONE

## Indice del capitolo

## 2.1 Analisi economica e analisi econometrica

Per illustrare con chiarezza il significato e gli obiettivi dell'econometria è opportuno partire da alcuni contenuti dell'analisi economica per effettuarne poi un'estensione in termini di elaborazione econometrica; si riesce così più facilmente a metterne in risalto le caratteristiche specifiche e ad evidenziarne le potenzialità.

Un'analisi economica di grande rilevanza fu fatta da J.M. Keynes (1936) quando formulò la relazione tra il consumo $c$ e il reddito $y$ rappresentabile nella forma

$$c = \alpha + \beta y \tag{2.1.1}$$

dove $c$ ed $y$ sono *variabili* mentre $\alpha$ e $\beta$ sono *parametri*, e la caratterizzò mediante le proposizioni seguenti:

- la funzione è stabile nel tempo;
- l'intercetta $\alpha$ è positiva e la propensione marginale al consumo $\beta$ è positiva e inferiore all'unità

$$a > 0 \ , \ 0 < \beta < 1 \tag{2.1.2}$$

- la propensione $\beta$ è inferiore alla propensione media.

Dal punto di vista matematico la forma (2.1.1) è *lineare* sia rispetto ai parametri che alle variabili. Per ottenere una forma *non lineare* rispetto a queste è sufficiente prendere i logaritmi naturali[1] di queste

$$\ln c = \alpha + \beta \ln y \ .$$

Per ipotizzare le relazioni (2.1.1)-(2.1.2) il Keynes si basò essenzialmente su considerazioni teoriche ed il funzionamento reale del sistema economico fu da lui esaminato, a questo proposito, soltanto in maniera descrittiva.

Sempre nell'ambito dell'analisi economica è possibile supporre che la funzione del consumo offra una descrizione migliore della realtà economica se $y$ viene sostituito dal reddito disponibile

$$y^d = y - v \tag{2.1.3}$$

dove $v$ è l'imposta globale sul reddito

$$c = \alpha + \beta(y - v) \tag{2.1.4}$$

[1] In econometria si usano soltanto i logaritmi in base *e*.

in quanto un esame anche semplificato del comportamento dei consumatori può condurre a ritenere che essi basino le decisioni di spesa sulla quantità di reddito che hanno effettivamente a disposizione una volta che siano detratte le imposte.

Equazioni quali le (2.1.1) e (2.1.4) sono dette *statiche* in quanto legano le variabili $c$, $y$ e $v$ allo stesso tempo; ma si può presumere, sempre congetturando in termini di teoria economica, che il consumo $c$ al tempo $t$ sia piuttosto funzione del reddito goduto nei periodi precedenti come nella relazione seguente

$$c_t = \alpha + \beta y_{t-1} \qquad \alpha > 0 \ , \ 0 < \beta < 1 \tag{2.1.5}$$

dove le variabili sono associate ad un indice temporale e $c_t$ è funzione lineare del reddito *ritardato* di un'unità temporale, oppure nell'altra

$$c_t = \alpha + \beta_0 y_t + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} \tag{2.1.6}$$

dove la variabile $y$ sussiste sia al tempo *corrente* che ritardato di una e due unità.

La (2.1.6) può essere ulteriormente generalizzata fino a considerare $k$ ritardi del reddito

$$c_t = \alpha + \beta_0 y_t + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_k y_{t-k}$$

ma sorge in tal caso un dissidio fra gli aspetti teorici e quelli empirici dell'analisi, determinato dal fatto che il numero di ritardi $k$, pur essendo relativamente semplice da determinare in termini empirici, è difficile da giustificare in termini teorici (perché $k$ e non $k$+1 o $k$-1?). Questa ulteriore estensione ha quindi un aspetto di arbitrarietà (il numero di ritardi $k$) che risulta difficilmente conciliabile con le esigenze di generalità dell'analisi teorica.

Questo dissidio può essere ricomposto se si generalizza la (2.1.6) fino a considerare infiniti ritardi temporali, ottenendosi lo *schema a ritardi distribuiti* infiniti

$$c_t = \alpha + \beta_0 y_t + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots = \alpha + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j y_{t-j} \tag{2.1.7}$$

nel quale la motivazione economica consiste nel ritenere che il consumo sia funzione di tutta la storia passata del reddito.

Si noti che in effetti è difficile poter supporre che esistano influenze significative dalle $y_{t-j}$ sulla $c_t$ per ritardi $j$ molto grandi. Dal punto di vista economico, però, la (2.1.7) ha il pregio di non imporre un *ritardo di troncamento* $k$ arbitrario. Al contempo, nonostante in essa figurino infiniti parametri, la (2.1.7) ha una forte motivazione in termini operativi, data la facilità con cui lo schema a ritardi distribuiti infiniti può essere trasformato, matematicamente, in modo da ridurre il numero, infinito, di parametri $\beta_j$ presenti ed ottenere una relazione molto parsimoniosa. Se si fanno le ipotesi

$$\beta_j = \beta \cdot \rho^j, \qquad 0 < \rho < 1 \tag{2.1.8}$$

che sono fortemente vincolanti dal punto di vista economico, sostituendo nella (2.1.7) si ottiene

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \beta\rho y_{t-1} + \beta\rho^2 y_{t-2} + \ldots \tag{2.1.9}$$

che, ritardata di un'unità temporale, diventa

$$c_{t-1} = \alpha + \beta y_{t-1} + \beta\rho y_{t-2} + \beta\rho^2 y_{t-3} + \ldots \tag{2.1.10}$$

Sottraendo, infine, dalla (2.1.9) la (2.1.10) moltiplicata per $\rho$ si ottiene

$$c_t - \rho c_{t-1} = (1-\rho)\alpha + \beta y_t \tag{2.1.11}$$

cioè, ponendo $(1-\rho)\alpha = \alpha'$,

$$c_t = \alpha' + \rho c_{t-1} + \beta y_t \tag{2.1.12}$$

che mostra come lo schema (2.1.7) con infiniti parametri $\beta_j$ possa essere trasformato in un altro contenente soltanto $\alpha$, $\beta$ e $\rho$.

Dunque, sotto le ipotesi (2.1.8) due modelli (2.1.7) e (2.1.12) sono equivalenti, sebbene il secondo sia ben più parsimonioso del primo. Dal punto di vista economico, tuttavia, non è affatto detto che le (2.1.8) siano aderenti alla realtà. In altre parole, il dissidio fra aspetti teorici e aspetti empirici è stato ricomposto inserendo un elemento di rigidità nel modello, cioè l'ipotesi che i $\beta_j$ decrescano secondo una progressione geometrica.

> *Osservazione* 2.1 - La quantità $c_t - \rho c_{t-1}$ è chiamata *quasi differenza* della $c_t$; se $\rho = 1$ si ha una *differenza* della $c_t$. Passando dalla (2.1.9) alla (2.1.11) si dice che si è operato con una quasi differenza sulla $c_t$.
>
> *Osservazione* 2.2 - Dal punto di vista della *specificazione* economica le due funzioni (2.1.7) e (2.1.12) differiscono per il fatto che nella prima il consumo è funzione del reddito ritardato una, due, ..., infinite volte, mentre nella seconda essa è funzione del solo reddito corrente $y_t$ e di se stesso ritardato una sola volta.
>
> *Osservazione* 2.3 - Se una variabile economica è funzione di se stessa ritardata una o più volte sussiste un fenomeno di inerzia temporale; nella (2.1.12) il consumo è una variabile *inerziale*.

All'interno della teoria economica, a questo punto, è difficile, per non dire impossibile, determinare quale sia la relazione migliore, tra quelle esposte, in termini di adeguatezza alla rappresentazione del funzionamento reale del sistema economico; in particolare, la speculazione teorica non è idonea a definire compiutamente la dinamica economica e quindi a discriminare tra le (2.1.5), (2.1.6) e (2.1.12) che presentano il reddito ed il consumo associati ad indici temporali diversi. Per effettuare una scelta razionale, allora, è necessario esaminare la realtà empirica non più soltanto in forma meramente descrittiva, ma con un'indagine più avanzata che utilizzi convenientemente i metodi statistici[2] per la determinazione (attraverso una stima) dei parametri e per la valutazione (tramite un criterio di ottimo) di ciascuno dei modelli proposti. Dall'analisi economica si passa, in tal guisa, all'analisi econometrica.

Durante le indagini empiriche accade sovente che si abbiano dei suggerimenti o delle indicazioni sul come modificare le ipotesi economiche di partenza, che quindi sono soggette ad essere nuovamente dettagliate ed analizzate con la metodologia fornita dalla statistica, oppure, ancora, data una formulazione teorica di partenza, avviene frequentemente che l'uso del procedimento econometrico per convalidarla o per confrontarla con altre ipotesi non tanto conduca ad una sua conferma o negazione ma piuttosto possa suggerire, in virtù dei ritrovati empirici, modificazioni o ampliamenti di carattere teorico che naturalmente soltanto il ricercatore con adeguata preparazione economica può sfruttare integralmente. La conseguenza di queste argomentazioni è che si sviluppa un'analisi econometrica composta da fasi di speculazione economica teorica e da fasi di indagine empirica non separabili bensì fortemente integrate tra di loro.[3]

---

**2** Dunque non è sufficiente l'uso dei dati osservati, come ad esempio l'asserito da Spanos (1986, p.3), a distinguere l'econometria dalle altre forme di studio dei fenomeni economici. L'analisi descrittiva di questi può esser effettuata all'interno di una speculazione economica ma non è condizione sufficiente a farla denominare econometrica.

**3** Non ha ragion d'essere, quindi, la vetusta idea secondo la quale la disamina econometrica è soltanto strumentale rispetto a quella economica.

## 2.2 I modelli e le loro caratteristiche

*Modelli statici e dinamici*

Le relazioni (2.1.1) e (2.1.4) tra le variabili $c$ ed $y$ costituiscono dei *modelli* rappresentativi di ipotesi economiche, e le disuguaglianze (2.1.2) cui sono soggetti loro parametri $\alpha$ e $\beta$ ne costituiscono parte integrante. Questi modelli sono rappresentazioni formali ed idealizzate delle caratteristiche osservate di regolarità e stabilità dei fenomeni economici sotto studio e vengono specificati in base al processo interattivo di speculazione teorica ed indagine empirica descritto nel paragrafo precedente.[4] Tali caratteristiche sono anche chiamate *fatti stilizzati* (si veda più avanti la figura 2.1).

I modelli (2.1.1) ed (2.1.4) sono detti *statici* poiché vi intervengono solo variabili *correnti*, cioè sono associate allo stesso tempo $t$; i modelli (2.1.5) (2.1.6) (2.1.7) e (2.1.12) sono detti *dinamici* in quanto contengono variabili sia correnti che *ritardate* di una o più unità temporali.

Poiché i fenomeni economici evolvono nel tempo, i modelli dinamici hanno una rilevanza ben più grande degli statici, ma occorre tener presente che questi ultimi possono sovente essere considerati come rappresentativi dei *sentieri di equilibrio di lungo periodo* dei modelli dinamici. Consideriamo ad esempio la relazione dinamica (2.1.12), che lega l'andamento del consumo a quello del reddito. Se si suppone, per semplicità, che il reddito segua un sentiero costante

$$y_t = y \tag{2.2.1}$$

allora anche il consumo tenderà a seguire una traiettoria costante $c$. Sostituendo, la (2.1.12) diventa

$$c = \frac{\alpha'}{1-\rho} + \frac{\beta}{1-\rho} y \tag{2.2.2}$$

che è analogo al modello statico (2.1.1); quest'ultimo, dunque, può essere visto come la relazione di equilibrio di lungo periodo tra il consumo ed il reddito nel caso in cui il modello di breve periodo sia quello dinamico (2.1.12) ed il comportamento di lungo periodo del consumo sia definito dalla (2.2.1).

> *Osservazione* 2.4 - Nella (2.1.12) il parametro $\beta$, che misura l'effetto immediato di un incremento del reddito sul consumo, può essere considerato come la propensione marginale al consumo di breve periodo

---

[4] Il concetto moderno di modello può essere fatto risalire i lavori di R. Frisch [1935-36] e J. Tinbergen [1939].

mentre ricaviamo dalla (2.2.2) che quella di lungo periodo vale $\beta/(1-\rho)$. Dato che $0\leq\rho<1$ la propensione di breve è minore di quella di lungo periodo. Ovviamente, se $\rho = 0$, cioè se la (2.1.12) diventa un modello statico, le due propensioni sono uguali.

*Il breve e il lungo periodo*

La differenziazione tra il breve e il lungo periodo assume importanza basilare non soltanto quando si tratta la teoria economica ma anche quando si costruisce un modello. Si ebbe un esempio di questo concetto quando fu osservato che negli anni compresi tra le due guerre mondiali negli U.S.A. la relazione tra il consumo di reddito, piuttosto che essere del tipo (2.1.1), risultava tale che:

- nel lungo periodo la propensione media al consumo *c/y* era costante;
- nel breve periodo tale rapporto oscillava.

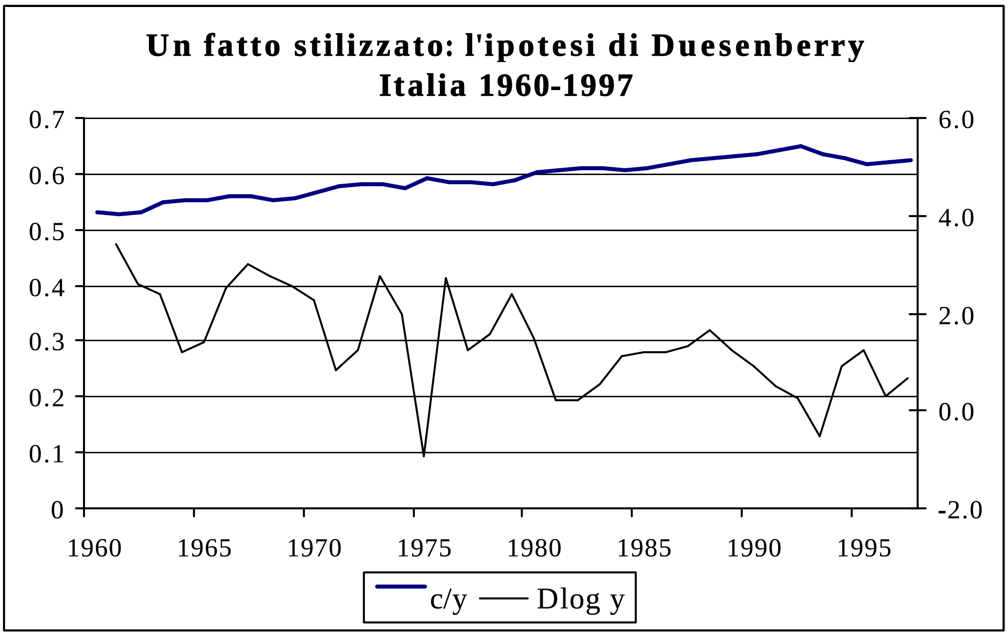


*Figura 2.1 – Andamento del rapporto $c_t/y_t$ (propensione media al consumo) e del tasso di crescita del PIL in Italia nel periodo dal 1960 al 1997, dati annuali. La propensione media presenta un andamento di fondo lievemente crescente (da 0.5 a 0.6) e, in accordo con l'ipotesi di Duesenberry, oscilla aumentando nelle fasi di recessione dell'attività economica (diminuzione di $\Delta\log y_t$) e diminuendo in quelle di espansione (aumento di $\Delta\log y_t$). In altre parole, le due serie sono inversamente correlate: il loro coefficiente di correlazione campionario è pari a -0.69.*

Inoltre fu notato che per ogni dato individuo tale rapporto diminuiva all'aumentare del reddito, fatto questo che J.S. Duesenberry [1949] spiegò con la *ipotesi del reddito relativo*, secondo la quale la percentuale di reddito consumato da ogni individuo non dipendeva direttamente dal suo reddito assoluto, ma dalla sua posizione, in termini di percentili, nella distribuzione del reddito; in altre parole, dal suo reddito relativo. Analiticamente questa ipotesi può essere scritta nella forma

$$\frac{c_t}{y_t} = \alpha + \beta \frac{y_t}{y^0}, \qquad \alpha > 0, \beta < 0;\ y^0 = \max(y_s; s < t) \tag{2.2.3}$$

dove $y^0$ è il reddito massimo goduto dall'individuo nel passato; nel lungo periodo si può ritenere che il reddito cresca ad un saggio costante $\gamma > 0$ per unità di tempo

$$y_t = (1+\gamma) y_{t-1} \tag{2.2.4}$$

analogamente a quanto ipotizzato nella (2.2.1) per il consumo, per cui è $y^0 = y_{t-1}$, e la (2.2.3) diviene

$$\frac{c_t}{y_t} = \alpha + \beta(1+\gamma) \tag{2.2.5}$$

con rapporto $c_t / y_t$ costante. Nel breve periodo, d'altro canto, si ha che durante le fasi di recessione è $y_t < y^0$ e quindi $c_t / y_t$ aumenta, mentre in quelle di espansione è $y_t > y^0$ ed il rapporto consumo su reddito diminuisce, come indicato dalla evidenza empirica. Nella figura 2.1 è illustrato lo schema di questo comportamento.

> *Osservazione* 2.4 - L'ipotesi di sentiero di crescita di lungo periodo (2.2.4) per il reddito $y_t$ è una delle tante che si possono fare, anche se molto comune. Poiché da essa si trae, partendo dalla costante $y_0$ che è il valore che $y_t$ assume all'origine dei tempi per $t = 0$, che
>
> $$y_1 = (1+\gamma) y_0$$
> $$y_2 = (1+\gamma) y_1 = (1+\gamma)^2 y_0$$
> $$\ldots$$
>
> sostituendo iterativamente si ottiene
>
> $$y_t = (1+\gamma)^t y_0 \tag{2.2.6}$$
>
> che rappresenta un'altra forma, anche questa molto adoperata, dell'ipotesi (2.2.4). La $y_0$ è una *condizione iniziale*, al di fuori della serie storica $\{y_t\}$

*Modelli fisici e analitici*

I modelli sono impiegati in molte branche della scienza per aiutare a comprendere e rappresentare situazioni complesse di vario tipo. Un modello in scala ridotta di aeromobile o di autovettura posti nella galleria del vento possono essere usati per studiare gli effetti aerodinamici dell'aria sul velivolo o sulla vettura; i geografi usano modelli topografici per riprodurre le caratteristiche fisiche di aree di interesse. Tutti questi sono esempi di *modelli fisici*.

Un *modello analitico* è invece costituito da un insieme di relazioni matematico-logiche che rappresentano le caratteristiche principali di certi fenomeni secondo una teoria od una ipotesi.

Esempi interessanti sono i modelli matematici della circolazione delle correnti atmosferiche e quelli che rappresentano i movimenti tellurici in aree più o meno vaste della superficie terrestre. Modelli di questo tipo sono utilizzati anche in economia: un esempio è costituito dall'insieme di relazioni di domanda e di offerta di un certo bene, con le quali si ricercano gli effetti di spostamenti della curva di domanda o di quella di offerta sul prezzo e sulla quantità; in questa analisi si rappresenta sinteticamente un particolare mercato interpretato in base ad una determinata teoria economica e la sua formulazione analitica fornisce un *modello di domanda e offerta*.

> *Osservazione* 2.5 - In questi anni di forte sviluppo dei calcolatori si usa simulare con essi il comportamento di oggetti fisici in determinate circostanze (ad esempio in differenti condizioni aerodinamiche). In questo caso il modello è analitico, poiché la rappresentazione dell'oggetto, anche se fisico, è effettuata con relazioni matematiche.

*Le variabili logaritmizzate, i tassi di variazione e le elasticità*

Spesso è conveniente utilizzare, al posto delle variabili originali, le loro trasformate ottenute con i logaritmi. La convenienza può essere duplice, statistica ed economica.

Generalmente le serie storiche economiche presentano una tendenza (crescente o decrescente) ed in funzione di questa modificano la loro variabilità. Di solito in una serie con tendenza crescente anche la variabilità aumenta, e questo può creare difficoltà sia nell'ispezione grafica sia, come vedremo in seguito, nel suo trattamento econometrico: la logaritmizzazione della serie ne produce un'altra con una variabilità molto più costante, ed in questo consiste la convenienza del tipo statistico.

Dal punto di vista economico, d'altro canto, l'uso delle variabili logaritmizzate nelle equazioni permette di interpretare alcuni parametri come elasticità.

Consideriamo ad esempio l'equazione della domanda di moneta

$$\ln m = \alpha + \beta_1 \ln y + \beta_2 \ln p + \beta_3 \left( r - r^d \right) \tag{2.2.7}$$

dove il simbolo "$\ln$" denota il logaritmo naturale, $m$ è la domanda di moneta nominale, $y$ è il reddito in termini reali, $p$ è un appropriato indice dei prezzi e $(r - r^d)$ è il differenziale fra il tasso di interesse sulle attività alternative a $m$ ed il tasso di interesse sui depositi bancari. I tassi di interesse generalmente non vanno logaritmizzati poiché rappresentano già di per sé valori percentuali.

Se si opera sulla (2.2.7) con una differenza prima nel senso definito nell'osservazione 2.1 si ottiene, dopo avere inserito gli indici temporali,

$$\ln m_t - \ln m_{t-1} = \beta_1(\ln y_t - \ln y_{t-1}) + \beta_2(\ln p_t - \ln p_{t-1}) + \beta_3[(r_t - r_{t-1})(r_t^d - r_{t-1}^d)] \qquad (2.2.8)$$

che può essere riscritta anche nella forma

$$\dot{m}_t = \beta_1 \dot{y}_t + \beta_2 \dot{p}_t + \beta_3(\Delta r_t - \Delta r_t^d) \qquad (2.2.9)$$

dove il simbolo "$\Delta$" denota appunto una differenza prima e il punto sopra una variabile indica una *differenza prima logaritmica* (cioè $\dot{m}_t = \Delta \ln m_t$). Nella (2.2.9) compaiono quindi alcune differenze prime logaritmiche, che sono approssimativamente uguali al *tasso di variazione* delle rispettive variabili Ad esempio, al membro di sinistra si ha[5]

$$\Delta \ln m_t = \ln m_t - \ln m_{t-1} \approx (m_t - m_{t-1})/m_{t-1} \qquad (2.2.10)$$

che, moltiplicato per 100, produce un tasso di variazione percentuale. La specificazione della (2.2.8) è corretta nel senso che fa corrispondere a variazioni percentuali del membro a sinistra altre variazioni percentuali a destra; se si logaritmizzassero i tassi di interesse verrebbe a cadere la loro dimensione di saggio di variazione.

L'approssimazione (2.2.10) è semplice da dimostrare: sviluppando in serie di Taylor la funzione $\ln(1+z)$ si ha

$$\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - z^4/4 + \ldots \qquad (2.2.11)$$

e ponendo

$$z = m_t / m_{t-1} - 1$$

si ottiene

$$\ln(m_t / m_{t-1}) = (m_t - m_{t-1})/m_{t-1} + \ldots$$

[5] Il segno $\approx$ indica "approssimativamente uguale a"

cioè la (2.2.10). Si noti che l'approssimazione nella (2.2.10) è tanto migliore quanto più piccolo è il valore (compreso tra 0 ed 1) di $z$: infatti i termini di secondo, terzo, ... grado sono tanto più piccoli quanto minore è $z$.

> *Osservazione 2.6* – È degno di nota il fatto che operando con una differenza prima è stata eliminata l'intercetta $\alpha$.

Ricordiamo ora che data la funzione $y = f(x)$ si definisce elasticità di $y$ a $x$ il rapporto fra tassi di variazione

$$\eta_{yx} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} \tag{2.2.12}$$

Se nella (2.2.9) ipotizziamo che tutte le variabili esplicative tranne il reddito siano costanti, essa si riduce alla

$$\dot{m}_t = \beta_1 \dot{y}_t$$

dalla quale si ricava immediatamente che il coefficiente $\beta_1$ approssima l'elasticità della moneta al reddito

$$\beta_1 = \frac{\Delta \ln m_t}{\Delta \ln y_t} \approx \frac{\frac{m_t - m_{t-1}}{m_{t-1}}}{\frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}} = \eta \tag{2.2.13}$$

dove l'approssimazione è determinata dal fatto che, secondo la (2.2.10), la differenza logaritmica approssima il relativo tasso di variazione.[6] In modo analogo si chiarisce che il coefficiente $\beta_2$ è l'elasticità della moneta al livello dei prezzi.[7]

L'elasticità definita nella (2.2.12) è riferita a un incremento discreto della variabile indipendente $x$. È possibile dimostrare che in effetti il coefficiente $\beta_1$ (o, in modo analogo, il $\beta_2$) approssima questa elasticità *discreta* perché esso misura l'elasticità cosiddetta *puntuale*, ovvero riferita ad un incremento infinitesimo della $x$.[8]

---

[6] Si noti che l'elasticità definita dalla (2.2.13) è un'elasticità *parziale*, perché è calcolata mantenendo costanti le altre variabili, e quindi ignorando, ad esempio, possibili retroazioni sulla moneta attraverso l'effetto del prodotto sui prezzi o sui tassi di interesse.

[7] Il coefficiente $\beta_3$ ha un diverso significato, che verrà chiarito spiegando il modello semilogaritmico nel paragrafo 2.8.

[8] Per la dimostrazione rinviamo all'appendice A-2 di Johnston (1984).

Nella figura 2.4 sono esposte le serie storiche dei tassi di variazione annuali delle due variabili della figura 2.2, i consumi finali interni delle famiglie $(c_t)$ ed il prodotto interno lordo ai prezzi di mercato $(y_t)$, nonché della propensione media al consumo $c_t / y_t$ per ogni tempo $t$. Dai primi due grafici si nota che il PIL possiede maggiore variabilità dei consumi finali interni e che sussistono chiaramente almeno quattro ciclicità: la prima che parte all'inizio del campione e procede fino al 1975; la seconda comprende gli anni 1975-1978; la terza gli anni 1978-1982 e la quarta interessa il resto del campione. Il confronto tra le serie dei tassi di variazione del sottostante grafico della propensione media al consumo permette di rilevare che i due picchi negativi della propensione media gli inizi degli anni 1974 e 1977 sono dovuti al fatto che nei periodi precedenti (nel corso del 1973 e 1976), il tasso di crescita del reddito è stato superiore a quello del consumo. La propensione media, d'altro canto, presenta una tendenza crescente abbastanza persistente, con una flessione nei primi anni '80 ed una successiva ripresa.

> *Osservazione 2.7* – I tassi di variazione annuali della figura 2.4 sono stati ottenuti con le *differenze quarte logaritmiche* $\ln z_t - \ln z_{t-4}$ operate sui dati trimestrali esposti nella figura 2.2.

## 2.3 Il processo di specificazione

Un elementare modello analitico di carattere economico formato da due equazioni è costituito dal seguente sistema statico di tipo keynesiano

$$\begin{cases} c_t = \alpha + \beta y_t \\ y_t = c_t + i_t \end{cases} \qquad 0 < \alpha \ , \ 0 < \beta < 1 \tag{2.3.1}$$

dove la prima equazione è la funzione del consumo (2.1.1) e la seconda è un'identità ex post tra il reddito e la somma del consumo e delle spese autonome $i$.

Nel sistema (2.3.1) sono presenti delle *variabili*, le $y$, $c$ ed $i$, che sono quantità che assumono valori generalmente differenti in circostanze (tempi, luoghi, individui, ecc.) diverse, e dei *parametri*, le $\alpha$ e $\beta$, che servono a legare le variabili in forme funzionali precise e che spesso sono soggetti a vincoli, ad esempio di disuguaglianza. Per questi motivi è spesso opportuno o necessario definire l'intervallo di variazione delle variabili e dei parametri: i prezzi, per esempio, sono non negativi, i profitti possono assumere valori sia positivi che negativi, la propensione marginale al consumo deve essere compresa tra zero ed uno.

Le variabili determinate all'interno di un modello sono dette *endogene*, mentre quelle definite esternamente sono dette (*deterministicamente*) *esogene*[9]. La scelta di quali variabili considerare come endogene e di quali altre come esogene è generalmente effettuata in base alla formulazione teorica di partenza; nel caso del modello (2.3.1) possiamo, ad esempio, definire come endogene il reddito $y$ ed il consumo $c$, e come esogena la variabile spesa autonoma $i$.

La determinazione di quali variabili inserire in un modello, di quali considerare come esogene e quali endogene, delle relazioni funzionali da usare per metterle in relazione l'una con l'altra, costituisce il processo di *specificazione* del modello che si basa sulla procedura interagente di analisi teorica ed indagine empirica illustrata in precedenza.

Alcuni dei concetti appena introdotti possono essere ribaditi anche sfruttando un modello costituito da una sola equazione. Al posto della (2.1.4) possiamo specificare una funzione del consumo nella quale questo sia funzione della ricchezza $w$

$$c = \alpha + \gamma w \tag{2.3.2}$$

---

**9** Questa forma di esogenità vale per modelli deterministici; la definizione nel caso stocastico è differente, come in seguito vedremo.

oppure un'altra nella quale compaiano sia il reddito disponibile che la ricchezza

$$c = \alpha + \beta y^d + \gamma w \qquad (2.3.3)$$

Queste due variabili considerate nella singola equazione (2.3.3) sono esogene, ma in un contesto pluriequazionale potrebbero essere endogene (in altre equazioni, come la $y$ nella prima delle (2.3.1)); è allora più conveniente chiamarle *esplicative* (in questo caso, del consumo $c$).

Dal punto di vista della teoria economica la (2.3.3) non pone soverchi problemi di costruzione se non quelli derivanti dall'approccio che si predilige. Da quello econometrico, viceversa, i problemi da risolvere sono molteplici. In primo luogo è necessario trovare dei contenuti per $w$: ammesso che sia stata ottenuta una definizione precisa di cosa rappresenti (contiene la porzione di debito pubblico detenuta dai privati? contiene il patrimonio immobiliare?...), per la stima dei parametri occorre trovare i dati ad essa relativi, una parte dei quali può essere di difficile, se non di impossibile, reperimento.

In secondo luogo la ricchezza delle famiglie, data dai loro redditi scontati, è fortemente collegata a $y^d$; variando questo, tende a variare nella stessa direzione anche $w$, per cui $y^d$ influisce sulla variabile non soltanto direttamente ma anche tramite la ricchezza. Si ha, dunque, su $c$ una *ridondanza* di effetti che può deteriorare la capacità rappresentativa della specificazione (2.3.3), in quanto può essere difficile discriminare statisticamente fra l'effetto diretto del reddito sul consumo (captato dal parametro $\beta$) e quello indiretto, tramite la ricchezza (che confluisce nel parametro $\gamma$).

Di più, la stima stessa dei parametri della (2.3.3) è resa inaffidabile dalla correlazione esistente tra le variabili esplicative, come vedremo in seguito, per cui, alla fine, la specificazione (2.3.3) risulta, dal punto di vista econometrico, problematica.

*Specificazione teorica e specificazione econometrica*

Se la specificazione è basata unicamente su concetti teorici, spesso non si hanno elementi sufficienti a costruire una rappresentazione econometrica adeguata alla realtà dei fenomeni economici da interpretare. Affinché la specificazione sia buona anche dal punto di vista empirico, oltre che da quello teorico, occorre che le caratteristiche di fondo delle variabili che compaiono nei membri a sinistra dei modelli siano rappresentate da caratteristiche analoghe esistenti nelle variabili dei membri a destra considerate globalmente. Nella (2.1.1), ad esempio, la *tendenza* crescente, che è una caratteristica basilare del consumo $c$, è insita anche nel reddito $y$, che quindi la rappresenta in modo soddisfacente, e si ottiene un modello buono sia dal punto di vista economico che econometrico. Il livello crescente di $y$, dunque, spiega la tendenza di $c$, per cui $y$ è detta *variabile di livello* (o *di scala*) della funzione del consumo (2.1.1).

> *Osservazione 2.8* - La propensione media al consumo, essendo costituita da una variabile divisa per la sua stessa variabile di livello, genera una equazione, ad esempio la (2.2.3), nella quale il livello è costante (la $\alpha$).

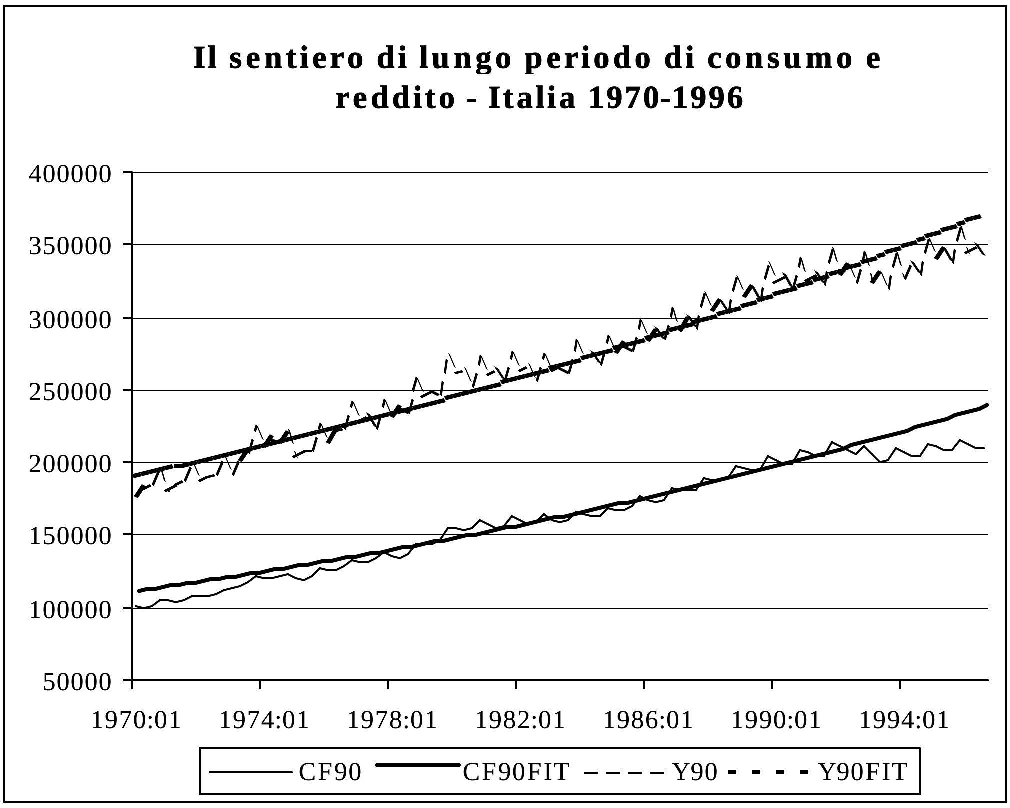


*Figura 2.2 – Serie storiche del prodotto interno lordo ai prezzi di mercato (in alto) e dei consumi finali interni delle famiglie in Italia, dal primo trimestre del 1970 al terzo del 1996, interpolati mediante curve che ne costituiscono i rispettivi sentieri di equilibrio di lungo periodo (dati trimestrali grezzi a prezzi 1990, miliardi di lire).*

Questa argomentazione è illustrata nella figura 2.2 che riporta gli andamenti effettivi – le serie storiche – dei consumi finali interni delle famiglie $c_t$ e del prodotto interno lordo ai prezzi di mercato $y_t$ dal primo trimestre del 1970 al terzo del 1996, interpolati tramite curve che rappresentano la loro tendenza crescente; questa può essere considerata come il *sentiero* (dei punti) *di equilibrio di lungo periodo* o "*steady state*". Una seconda caratteristica presente nelle due serie storiche è la *stagionalità*, costituita da una conformazione che si ripete similmente ogni anno e che deriva, nel caso delle serie trimestrali della figura 2.2, dal calo della produzione che si ha nel terzo trimestre di ogni anno. Altri caratteri delle serie (ad esempio il ciclo economico) oppure altri effetti di breve periodo modulano ulteriormente la tendenza in modo da determinare l'andamento effettivo delle variabili $c$ ed $y$.

> *Osservazione 2.9* - L'equazione che genera il sentiero di equilibrio di lungo periodo per la variabile $y$ può essere presa soggettivamente del tipo (2.2.6); la stessa equazione nel caso del consumo è
>
> $$c_t = (1+g)^t c_0$$
>
> *Osservazione 2.10* – Il ciclo economico italiano, ben visibile nella figura 2.4, è stato commentato alla fine del par. 2.2.

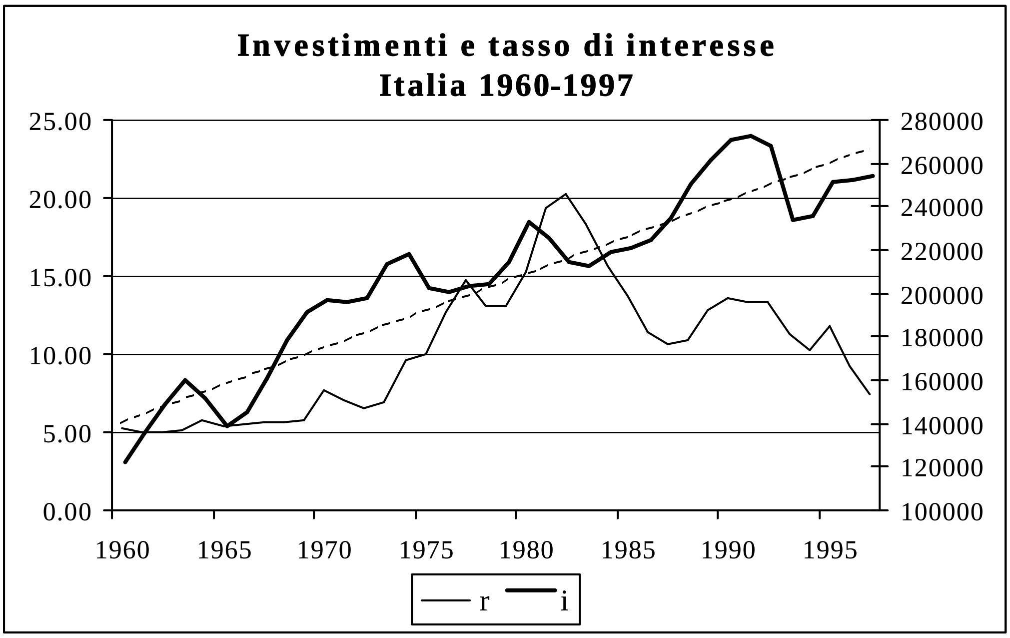


*Figura 2.3 – Il tasso di interesse a lungo termine r e gli investimenti privati in Italia dal 1960 al 1997. La serie degli investimenti mostra una tendenza crescente (evidenziata dalla retta tratteggiata), che la porta a triplicare nel periodo di osservazione; viceversa, quella del tasso di interesse a lungo manifesta ampie fluttuazioni attorno a una media approssimativamente pari a 10 punti percentuali, per cui al termine del periodo di osservazione supera di poco i valori iniziali.*

Se estendiamo il modello (2.3.1) disaggregando le spese autonome $i$ in spesa pubblica $g$ ed in investimenti privati che indichiamo ancora, per semplicità, con $i$, e se consideriamo questi come funzione del tasso interesse $r$, otteniamo il modello

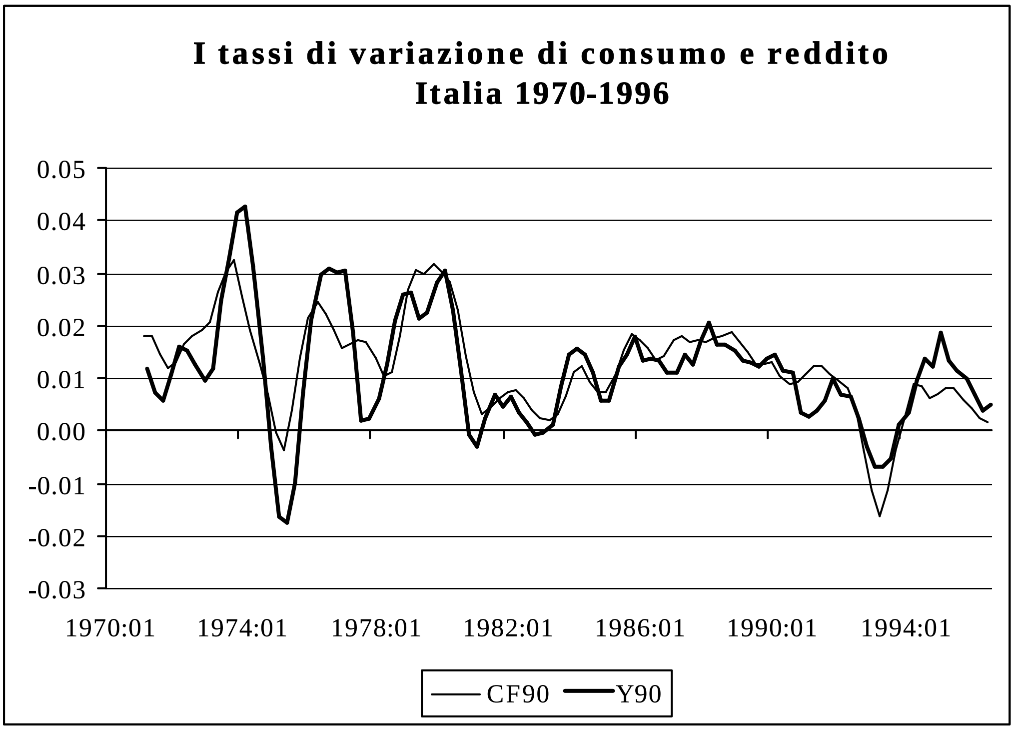


*Figura 2.4 – I tassi tendenziali di variazione di consumo e reddito in Italia (dati trimestrali grezzi 1970:1-1996:3). Per tasso tendenziale si intende il tasso di variazione "periodo su periodo" (in questo caso, trimestre sullo stesso trimestre dell'anno precedente). I dati di origine sono quelli della figura 2.2. Si noti come le fluttuazioni del reddito siano generalmente più ampie di quelle dei consumi: questi ultimi, cioè, hanno un andamento più "liscio" o, per meglio dire, livellato. Questo comportamento (visibile anche nella figura 2.2) è coerente con l'ipotesi di Duesenberry: infatti, se durante le recessioni la propensione media al consumo aumenta, questo significa che i consumi diminuiranno proporzionalmente meno dei redditi e quindi che il loro grafico sarà più "liscio" (si osservi ad esempio il comportamento delle due serie durante la recessione del 1974-75). Un discorso uguale e contrario vale durante le fasi di espansione.*

$$\begin{cases} c_t = \alpha + \beta y_t & \alpha > 0 & 0 < \beta < 1 \\ i_t = \gamma + \delta r_t & \gamma > 0 & \delta < 0 \\ y_t = c_t + i_t + g_t \end{cases} \tag{2.3.4}$$

che è coerente con la teoria economica ma insoddisfacente dal punto di vista econometrico. Infatti, come anche si rileva graficamente nella figura 2.3, nell'equazione degli investimenti privati manca una variabile nel membro a destra dell'equazione che funga da supporto al livello crescente di $i_t$. È necessario, quindi, specificare la (2.3.4) aggiungendo una variabile di livello nel membro di destra dell'equazione degli investimenti privati: questa può essere di nuovo il reddito $y_t$, di modo che il sistema diventa

$$\begin{cases} c_t = \alpha + \beta y_t & \alpha > 0 \qquad 0 < \beta < 1 \\ i_t = \gamma + \delta r_t + \varepsilon y_t & \gamma > 0 \qquad \delta < 0 \qquad \varepsilon > 0 \\ y_t = c_t + i_t + g_t \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Comparando il modello (2.3.4), che discende direttamente dalla teoria economica, con il (2.3.5), la cui specificazione è necessaria per l'uso econometrico, si inizia a comprendere la differenza concettuale esistente tra la costruzione di modelli validi per l'analisi economica e quella di modelli utilizzabili nell'analisi econometrica.

## 2.4 Tassonomia delle equazioni

Nella specificazione delle relazioni tra variabili economiche è necessario tenere nella dovuta considerazione i fenomeni rappresentati dalle equazioni e spesso è utile classificare queste in funzione di tali fenomeni, ad esempio raggruppandole in equazioni:

a) di comportamento,

b) istituzionali,

c) tecniche,

d) definitorie.

A queste se ne possono aggiungere altre, più speciali, che possiamo ancora inserire nella tassonomia delle equazioni econometriche, come ad esempio le

e) identità,

f) funzioni di reazione.

*Equazioni di comportamento*

In molte situazioni è necessario esprimere un'ipotesi circa il *comportamento* di un insieme di operatori, siano questi consumatori, produttori o altri. Una funzione di domanda rappresenta l'ipotesi che se il prezzo di un certo bene decresce i consumatori ne chiederanno di più; questa è una conclusione che riguarda il loro comportamento e può essere espressa mediante l'equazione di domanda lineare

$$q^d = \alpha + \beta p \qquad \alpha > 0 \; , \; \beta < 0 \tag{2.4.1}$$

Un altro esempio di equazione di comportamento è costituito dalla funzione del consumo (2.1.4) già esaminata nel paragrafo 2.1, nella quale sono impiegate due ipotesi, quella che il consumo sia funzione del reddito disponibile e l'altra che la funzione sia lineare. Anche l'equazione della domanda di moneta (2.2.7), lineare nei logaritmi delle variabili $y$ e $p$ e nei tassi di interesse, è di comportamento.

Si noti che anche se viene utilizzata una formulazione analitica (matematica) per rappresentare una relazione di comportamento, la forma che questa prende ed i vincoli che sono posti sui parametri sono determinati da considerazioni economiche. Nella funzione del consumo (2.1.4), ad esempio, la teoria economica impone che

- il consumo sia funzione crescente del reddito disponibile, per cui $\beta > 0$;
- l'inclinazione della funzione, che indica la propensione marginale al consumo e che è definita dal coefficiente angolare $\beta$, sia compresa tra zero ed uno;
- l'intercetta, il termine noto dell'equazione, sia maggiore di zero, $\alpha > 0$.

Con l'ultima ipotesi si suppone che le spese per il consumo possano anche essere maggiori del reddito disponibile corrente. Il comportamento definito è quindi di breve periodo in quanto si ritiene che i consumatori possano finanziare le loro spese tramite il risparmio.

Un ulteriore esempio di equazione di comportamento riguarda lo stock di capitale desiderato per il tempo $t+1$ che può esser fatto dipendere dalla produzione programmata per lo stesso tempo; se questa è supposta funzione dei livelli di produzione passati, dando maggior peso a quelli recenti e minore a quelli lontani nel tempo, si può scrivere l'equazione nella stessa forma composta dalle (2.1.7) e (2.1.8)

$$k_{t+1} = \alpha + \beta \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j x_{t-j} \quad \beta > 0 \;,\; 0 < \rho < 1$$

dove $k_t$ è lo stock di capitale desiderato al tempo $t$, $x_t$ la produzione al tempo $t$, $\beta$ il coefficiente di accelerazione e $\rho$ un fattore di ponderazione.

*Equazioni istituzionali*

Un'equazione *istituzionale* è una relazione nella quale sono incorporati gli effetti di vincoli istituzionali (leggi, norme d'attuazione, decreti, ecc.) in vigore.

L'imposizione fiscale, ad esempio, può essere determinata istituzionalmente e quindi può rivelarsi necessario inserire nei modelli le imposte sui profitti, sul valore aggiunto e così via. Una equazione istituzionale per l'imposta globale sul reddito potrebbe indicare che

$$v = \zeta + \varepsilon y \tag{2.4.2}$$

rappresentando il fatto che le imposte dipendano linearmente dal reddito stesso.

Sostituendo la (2.4.3) nella (2.1.4) si ottiene la

$$c = \alpha - \zeta\beta + \beta(1-\varepsilon)y \tag{2.4.3}$$

che consiste in una *mistura* tra un'equazione di comportamento ed una istituzionale.

> *Osservazione* 2.11 – Poiché $\beta(1-\varepsilon)$ può essere considerata come un unico parametro, così come $\alpha - \zeta\beta$, la relazione (2.4.3) ha la stessa composizione della (2.1.1); quindi non vi è sostanziale differenza formale tra la (2.1.1) e la (2.1.4) qualora l'imposta globale sul reddito sia supposta funzione lineare di questo. Tale situazione riveste un certo interesse, poiché accade sovente che uno schema analitico viene criticato per la sua semplicità e siano proposti al suo posto modelli più complessi sui quali, tuttavia, si fanno ipotesi che li trasformano nello schema

semplice sottoposto a critiche. Non sempre, dunque, modelli apparentemente banali sono derivati da teorie altrettanto banali.

*Equazioni tecniche*

Una equazione molto utilizzata nella modellistica economica è quella relativa alla funzione di produzione

$$x = f(l,k) \tag{2.4.4}$$

dove $x$ è il prodotto, $l$ il fattore lavoro e $k$ il fattore capitale. Una tale equazione non è di comportamento: si riferisce invece alla tecnologia in uso nella produzione, in quanto collega due risorse (lavoro e capitale) ad un prodotto, e rappresenta, pertanto, una equazione *tecnica*. Un caso particolare della (2.4.4) è offerto dalla

$$x = \gamma \cdot l^{\alpha} \cdot k^{\beta} \qquad \alpha + \beta = 1 \tag{2.4.5}$$

che rappresenta il ben noto tipo di funzione di Cobb e Douglas.

*Equazioni definitorie*

Si chiamano, infine, equazioni *definitorie* quelle che servono semplicemente a definire una variabile per mezzo di altre; è tale ad esempio la (2.1.3) che indica il reddito disponibile come differenza tra il reddito e le imposte.

In realtà, queste relazioni definitorie sono identità “ex ante” che semplicemente esprimono concetti veri per definizione.

*Identità*

È necessario prestare attenzione a non confondere le equazioni definitorie con altre condizioni; ad esemp io la relazione

$$y_t = c_t + i_t$$

del modello (2.3.1) indica un’identità "ex post" e non è un’equazione definitoria “ex ante”.

*Funzioni di reazione*

Un’equazione che rappresenta il modo di reagire di un’autorità di governo a specifiche variazioni di aggregati economici è detta *funzione di reazione*. Tale modo di reagire può riguardare, ad esempio, il cambio, la moneta offerta, il tasso di sconto, l’imposizione fiscale. Una semplice funzione di reazione sul tasso di sconto $r_t^d$ è del tipo seguente

$$\Delta r_t^d = \alpha + \beta \Delta \ln p_t \tag{2.4.6}$$

che indica come la variazione di $r_t^d$ sia operata in funzione del tasso di variazione dei prezzi. Un'altra, del tipo seguente

$$\Delta r_t^d = \alpha + \beta_1 \Delta \ln b_t + \beta_2 \Delta \ln f_t + \beta_3 \Delta \ln d_t \qquad (2.4.7)$$

indica come la variazione di $r_t^d$ venga governata in funzione dei tassi di variazione percentuale della bilancia commerciale $b_t$ (definita come rapporto tra esportazioni ed importazioni di merci), del movimento dei capitali $f_t$ (rapporto fra flussi di capitale a breve termine in entrata ed in uscita) e di un indicatore $d_t$ dell'attività economica (ad esempio la domanda totale).

Nella (2.4.7) la manovra sul tasso di sconto è *prociclica* se $\beta_3 < 0$ (ad un aumento dell'attività economica l'autorità di governo reagisce abbassando $r_t^d$), *anticiclica* se $\beta_3 > 0$.

## 2.5 Forma strutturale e forma ridotta delle equazioni

*La struttura economica*

Un modello econometrico è rappresentativo in generale di una *struttura economica*, che può essere definita, in termini generali, come un insieme di comportamenti, di possibilità tecniche di produzione, di fattori istituzionali, di convenzioni contabili, ecc., che si ipotizzano costanti per un certo periodo di tempo, detto *periodo di osservazione*. Sul piano descrittivo, alla costanza della struttura teorica corrisponde un insieme di regolarità empiriche, i cosiddetti *fatti stilizzati*, che riassumono le caratteristiche salienti manifestate dai dati nel periodo di osservazione. Le equazioni (di comportamento, tecniche, istituzionali, ecc.) che rappresentano i diversi aspetti di una data struttura economica in base a specifiche ipotesi teoriche vengono dette *strutturali*, come i parametri ad esse associati durante i periodi di osservazione. Il modello composto mettendo a sistema un insieme di equazioni strutturali viene detto *modello strutturale*.

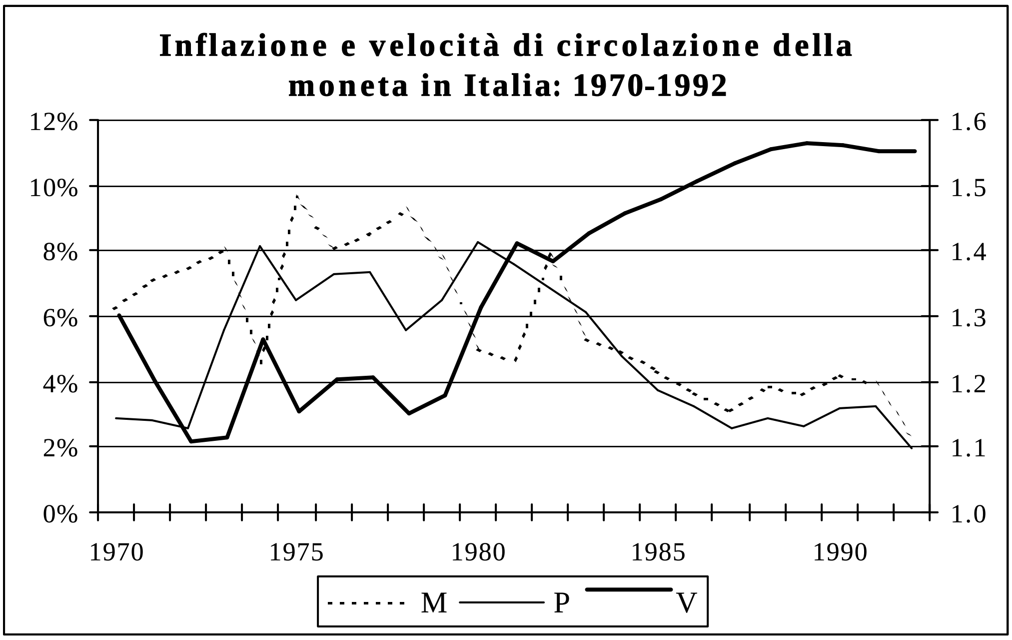


*Figura 2.5 – Il grafico rappresenta le serie storiche dei tassi annuali di variazione dello stock di moneta M e del deflatore implicito del PIL P (scala di destra), e la velocità di circolazione della moneta V (scala di sinistra). Dati annuali riferiti all'Italia, 1970-1992. Si noti l'impennata della velocità di circolazione contestuale all'incremento dell'inflazione nella seconda metà degli anni '70.*

Talvolta, in un dato periodo esiste un tempo $t$ nel quale cambia la struttura economica e quindi si modifica il modello econometrico associato nei valori dei suoi parametri o anche nella specificazione stessa delle relazioni che lo compongono: si dice, allora, che nel tempo $t$ si è avuto un *cambiamento strutturale*.

In effetti, è necessaria molta cautela nel ritenere costante la struttura economica in un certo periodo: ad esempio, nella cosiddetta equazione di Cambridge che mette in relazione la domanda di moneta con il reddito

$$m_t^d = ky_t \tag{2.5.1}$$

il coefficiente $k$ rappresenta l'inverso della velocità di circolazione della moneta e può essere considerato costante perché è determinato dall'insieme dei pagamenti e di introiti che a loro volta derivano da abitudini o da fattori sociali ed istituzionali che cambiano molto lentamente. Ma in periodi di inflazione sostenuta la velocità di circolazione cambia in modo notevole e quindi varia anche $k$; in tale caso questa deve essere considerata come una variabile ed indicata con $k_t$. Questa argomentazione è illustrata nella figura 2.5 che mostra i grafici dei tassi annuali di variazione della quantità di moneta (misurata in termini di M2) e del deflatore implicito del PIL, nonché il grafico della velocità di circolazione della moneta; questo è relativamente costante degli anni 1970-1978, s'impenna negli anni di alta inflazione 1979-1981 e ritorna ad essere costante nel periodo successivo.

Anche la propensione marginale al consumo $\beta$ del modello (2.1.1) può variare lentamente nel tempo come osserveremo più in dettaglio nel prosieguo. L'assunzione di $\beta$ costante comporta, pertanto, una approssimazione il cui costo, in termini di adeguatezza di rappresentazione, può essere compensato o meno dalla semplicità dell'equazione. In effetti, se nella (2.1.1) si introducesse $\beta$ variabile il modello potrebbe diventare non lineare nelle variabili, come vedremo più in dettaglio nel paragrafo 2.8.

*Forma ridotta di un modello*

Il sistema (2.3.1) è scritto in forma strutturale in quanto deriva direttamente da ipotesi circa la struttura del sistema economico, riguardanti, in particolare, il comportamento dei consumatori e la struttura del bilancio economico nazionale (cioè il fatto che nell'economia rappresentata il reddito risulta dalla somma di consumi e spese autonome). Se risolviamo matematicamente le sue due equazioni rispetto alle variabili endogene $c_t$ e $y_t$, otteniamo

$$\begin{cases} c_t = \dfrac{\alpha}{1-\beta} + \dfrac{\beta}{1-\beta} i_t \\ y_t = \dfrac{\alpha}{1-\beta} + \dfrac{1}{1-\beta} i_t \end{cases} \tag{2.5.2}$$

con $0 < \alpha$, $0 < \beta < 1$, che costituisce un sistema di equazioni scritte in *forma ridotta*, nel quale ogni equazione definisce una variabile endogena in funzione di tutte e sole le esogene (in questo caso la sola $i_t$).

Con semplici sostituzioni possiamo scrivere la forma ridotta (2.5.2) come segue

$$\begin{cases} c_t = \pi_{11} + \pi_{12} i_t \\ y_t = \pi_{21} + \pi_{22} i_t \end{cases} \tag{2.5.3}$$

dove i $\pi_{ij}$, ovvero i parametri che legano l'*i*-esima endogena alla *j*-esima esogena, sono detti *parametri della forma ridotta* o (per motivi che verranno chiariti in questo paragrafo) *moltiplicatori*.

Dal punto di vista matematico la forma ridotta e quella strutturale di un sistema di equazioni sono equivalenti; in termini economici, al contrario, le equazioni strutturali rappresentano le relazioni così come vengono formulate dalla teoria economica. Di conseguenza, i parametri strutturali rappresentano entità facilmente interpretabili in senso economico (si ricordi il cenno all'analisi strutturale nel paragrafo 1.1). In particolare, gli eventuali vincoli provenienti dalla teoria economica vengono di solito espressi in termini dei parametri strutturali (si veda ad esempio la (2.1.2)).

Lo studio delle equazioni in forma ridotta, viceversa, è utile nelle previsioni e nelle simulazioni di politica economica. Ad esempio, la prima delle (2.3.1), presa singolarmente, non ci consente di determinare gli effetti di un incremento delle spese autonome sul consumo $c$, dato che in essa le spese autonome non figurano. Viceversa, nella forma ridotta questo effetto, che si esplica attraverso la seconda delle (2.3.1), è espresso dal parametro $\pi_{12} = \beta/(1-\beta)$, che costituisce il *moltiplicatore keynesiano* del modello (2.3.1).

In generale i parametri $\pi_{ij}$ della forma ridotta sono detti moltiplicatori appunto perché esprimono il coefficiente per il quale occorre moltiplicare l'incremento della *j*-esima esogena onde ottenere il corrispondente incremento dell'*i*-esima endogena, tenuto conto di tutte le interazioni fra le varie equazioni che compongono il modello.

Anche in termini statistici le due rappresentazioni differiscono sostanzialmente in quanto la forma strutturale, incorporando l'informazione proveniente dalla teoria economica, è generalmente più *parsimoniosa* della forma ridotta, ovvero prevede un numero minore di parametri. Questo fatto risulta, ad esempio, dal confronto fra la (2.5.3) (nella quale figurano i quattro parametri $\pi_{ij}$) e la (2.3.1) (dove compaiono solo i due parametri strutturali $\alpha$ e $\beta$).[10] Sotto il profilo statistico ciò comporta che la forma strutturale consente un uso più efficiente dell'informazione statistica disponibile (i dati campionari), poiché gli stessi dati vengono utilizzati per stimare un minor numero di coefficienti. Come vedremo in seguito, a questo vantaggio in termini di stima si associano però anche alcune difficoltà inerenti al fatto che in generale nelle equazioni strutturali alcune variabili esplicative sono endogene, e quindi determinate simultaneamente alla variabile dipendente.

Possiamo, ora, riassumere alcuni caratteri di base di un modello econometrico così com'è stato illustrato finora:

i) il numero di equazioni è uguale al numero delle variabile endogene;

ii) la forma funzionale di ciascuna equazione strutturale è esplicitamente specificata insieme agli eventuali vincoli sui domini di variazione dei parametri;

iii) l'insieme delle variabili esogene è incluso nel modello ed è specificata la maniera in cui esse vi entrano;

iv) se sussistono mercati in equilibrio le condizioni relative vanno inserite nel modello, che viene detto *di equilibrio*.

Vedremo in seguito che il carattere i) non sempre sussiste.

*Un modello di domanda e offerta*

Consideriamo ora, come altro esempio, un semplice modello di domanda e offerta in un mercato concorrenziale

$$\begin{cases} q^d = \alpha + \beta p & \alpha > 0 \\ q^s = \gamma + \delta p & \gamma < 0 \end{cases} \tag{2.5.4}$$

nel quale la prima equazione, già esposta nella (2.4.1), stabilisce una relazione lineare tra la quantità domandata *per unità di tempo* $q^d$ ed il prezzo di mercato $p$, mentre la seconda ne stabilisce un'altra tra la quantità offerta *per unità di tempo* ed ancora il prezzo di mercato. In virtù di come sono state costruite, le equazioni (2.5.4) sono in forma strutturale; esse rappresentano un *modello di disequilibrio*.

Se il mercato è in equilibrio dobbiamo aggiungere alle (2.5.4) la condizione

---

[10] In effetti i parametri della forma ridotta sono tre: sussiste infatti il vincolo $\pi_{11} = \pi_{21}$, dato che entrambi questi parametri sono uguali a $\alpha/(1-\beta)$ in virtù delle (2.5.2).

$$q^d = q^s = q \tag{2.5.5}$$

ottenendosi così un modello con tre equazioni strutturali (una *condizione di equilibrio* e due equazioni che rispecchiano il comportamento dei consumatori e dei produttori) e tre variabili endogene $q^d$ , $q^s$ , e $p$ .

Risolvendo il sistema rispetto a $q$ ed a $p$ , otteniamo

$$p = \frac{\alpha - \gamma}{\delta - \beta}\ , \quad q = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta - \beta}, \qquad \delta \neq \beta \tag{2.5.6}$$

che rappresentano la *forma ridotta* del modello. Sui valori dei suoi parametri la teoria economica impone dei vincoli: poiché se il prezzo $p$ scende $q^d$ aumenta e viceversa, segue che $\beta < 0$; inoltre se il prezzo aumenta anche la quantità offerta cresce per cui segue che $\delta > 0$.

Poiché allora è sempre $\delta > \beta$ e poiché $p > 0$, essendo un prezzo, si ha che $\alpha > \gamma$ dalla prima delle (2.5.6) e che $\alpha\delta > \beta\gamma$ dalla seconda. In conclusione, la specificazione del modello (2.5.4)-(2.5.5) include i seguenti vincoli sui parametri

$$\beta < 0\ ,\ \delta > 0\ ,\ \alpha > \gamma\ ,\ \beta\gamma < \alpha\delta$$

Nel modello (2.5.4)-(2.5.5) non compaiono variabili esogene; possiamo tuttavia considerare il reddito $y_t$ come esogena aggiuntiva e costruire il sistema

$$\begin{cases} q^d = \alpha + \beta p + \varepsilon y & \alpha > 0 \quad \beta < 0 \quad \varepsilon > 0 \\ q^s = \gamma + \delta p & \delta > 0 \qquad\quad \gamma < 0 \\ q^d = q^s = q \end{cases} \tag{2.5.7}$$

specificato in modo tale che una variazione positiva del reddito influisce positivamente sulla quantità domandata. La forma ridotta della (2.5.7) è costituita dalle

$$p = \frac{\alpha - \gamma}{\delta - \beta} + \frac{\varepsilon}{\delta - \beta} y\ , \quad q = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta - \beta} + \frac{\delta\varepsilon}{\delta - \beta} y\ , \qquad \delta \neq \beta \tag{2.5.8}$$

che diventano le (2.5.6) per $e = 0$.

Poiché in ambedue le equazioni (2.5.8) compare il reddito, è possibile determinare come una variazione di questo influisca sia su $p$ che su $q$ tramite le derivate

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\varepsilon}{\delta - \beta} > 0\ , \qquad \frac{dq}{dy} = \frac{\delta\varepsilon}{\delta - \beta} > 0$$

che sono, in effetti, i *moltiplicatori* del reddito nel modello (2.5.6).

## 2.6 Variabili teoriche e variabili osservabili

Le variabili contemplate nella teoria economica sono dette *teoriche* e non sempre sono misurabili empiricamente; quelle che, invece, possono assumere valori dedotti dai dati a disposizione sono chiamate *osservabili*. In molti casi, ovviamente, variabili teoriche e variabili osservabili non coincidono.

Illustriamo questa differenza con un esempio tratto dall'analisi della domanda e dell'offerta, che concerne la determinazione del prezzo in regime di mercato concorrenziale.

La domanda di un certo bene viene espressa mediante una funzione che mette in relazione la quantità domandata *per unità di tempo* con il prezzo del bene. Tuttavia tale quantità domandata si riferisce a ciò che il consumatore desidera comperare ad un certo prezzo e non a ciò che egli effettivamente compera, sebbene possa accadere in certi casi che la quantità comperata sul mercato coincida con la quantità domandata.

La quantità domandata e la quantità offerta per unità di tempo sono variabili soltanto teoriche, mentre la quantità effettivamente comperata per unità di tempo è una variabile osservabile.

Allora, quando nel modello (2.5.4) $q^d$ e $q^s$ assumono i valori determinati dai consumatori e, rispettivamente, dai produttori, le due variabili sono teoriche; quando il mercato le uguaglia a $q$, questa è osservabile.

Alcune serie fornite dalle statistiche ufficiali non sono osservate direttamente, ma vengono ridotte, tramite particolari procedure statistiche, ad una cadenza più veloce a partire da serie osservate ad una cadenza più lenta. Questo è il caso delle serie della contabilità nazionale trimestrale, che sono derivate da serie (osservate) annuali mediante un algoritmo di trimestralizzazione.

In altre situazioni di necessità, serie non osservate vengono sostituite da serie *proxy*, con andamenti simili: ad esempio il PIL mensile, di dubbio ottenimento anche mensilizzando il prodotto annuale, può essere in taluni casi sostituito con la produzione industriale, che funge da *proxy* mensile.

Variabili economiche di importanza teorica notevole ma raramente osservabili sono quelle attese: ad esempio le aspettative di inflazione o di produzione. In certi casi le variabili non osservabili sono generate mediante modelli costruiti appositamente, come vedremo nei due punti seguenti.

*Schemi di attese adattive*

Un semplice modello generatore delle attese di inflazione è dovuto a Cagan (1956) ed ha la forma della seguente *relazione di apprendimento*

$$\dot{p}_t^e - \dot{p}_{t-1}^e = (1-\lambda)(\dot{p}_t - \dot{p}_{t-1}^e) \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{2.6.1}$$

dove $\dot{p}_t$ è il tasso di inflazione al tempo $t$ dato dalla *differenza prima logaritmica*

$$\dot{p}_t = \Delta \ln p_t = \ln p_t - \ln p_{t-1} \tag{2.6.2}$$

approssimativamente uguale, come si è visto nel paragrafo 2.2, alla variazione percentuale del livello dei prezzi $p_t$ tra $t-1$ e $t$; e $\dot{p}_t^e$ è il tasso di inflazione atteso per il tempo $t+1$, formulato nel tempo $t$.

L'equazione (2.6.1) indica che l'operatore che esprime l'opinione nel tempo $t$ confronta la sua previsione $\dot{p}_{t-1}^e$, fatta nel tempo precedente, con il valore effettivo $\dot{p}_t$ e formula per il tempo $t+1$ una attesa $\dot{p}_t^e$ maggiore di $\dot{p}_{t-1}^e$ se $\dot{p}_t > \dot{p}_{t-1}^e$, ed una minore nel caso contrario. È per questo comportamento che la (2.6.1) costituisce uno schema di *apprendimento dall'errore*[11] (di previsione, pari allo scarto $\dot{p}_t - \dot{p}_{t-1}^e$) ovvero di attese adattive, in quanto le aspettative si adattano all'andamento del tasso di inflazione effettivo, sia pure con un certo ritardo.

Se $\lambda = 1$ l'adattamento è inesistente; se $\lambda = 0$ è invece $\dot{p}_t - \dot{p}_{t-1}^e$, cioè il valore atteso è uguale all'ultimo dato effettivo disponibile e l'adattamento è immediato.

L'equazione (2.6.1) può essere risolta rispetto a $\dot{p}_t^e$, ottenendosi

$$\dot{p}_t^e = \lambda \dot{p}_{t-1}^e + (1-\lambda)\dot{p}_t \tag{2.6.3}$$

che può essere riscritta iterativamente nel tempo

$$\begin{aligned} \dot{p}_{t-1}^e &= \lambda \dot{p}_{t-2}^e + (1-\lambda)\dot{p}_{t-1} \\ \dot{p}_{t-2}^e &= \lambda \dot{p}_{t-3}^e + (1-\lambda)\dot{p}_{t-2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Sostituendo successivamente questi valori nella (2.6.3) si ha

$$\begin{aligned} \dot{p}_t^e &= \lambda^2 \dot{p}_{t-2}^e + \lambda(1-\lambda)\dot{p}_{t-1} + (1-\lambda)\dot{p}_t = \\ &= \lambda^3 \dot{p}_{t-3}^e + \lambda^2(1-\lambda)\dot{p}_{t-2} + \lambda(1-\lambda)\dot{p}_{t-1} + (1-\lambda)\dot{p}_t = \dots = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \dot{p}_{t-j} \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

dove la variabile attesa è funzione soltanto di tutti i valori passati del tasso di inflazione secondo lo schema di decadimento geometrico di ragione $\lambda$. Questa relazione mette bene in evidenza come l'attesa di inflazione sia *generata* da un modello contenente soltanto i tassi di inflazione presente e passati. In questo senso

---

**11** In lingua inglese: *error-learning model*. Tale schema di apprendimento è utilizzato anche in altre situazioni.

il (2.6.4), e cioè il (2.6.1), è un modello generatore di una variabile non osservabile, l'inflazione attesa appunto, in funzione di variabili osservate, cioè il valore dell'inflazione sperimentato storicamente.

> *Osservazione 2.12* – L'equazione (2.6.1), o l'equivalente (2.6.4), è definitoria per il tasso di inflazione atteso, secondo la tassonomia del paragrafo 2.2. La relazione (2.6.4) rappresenta uno schema a ritardi distribuiti infiniti, già utilizzato dalla funzione del consumo (2.1.7) e in quella dello stock di capitale.

*L'operatore di ritardo L*

Alla relazione (2.6.4) si arriva più direttamente se si fa uso dell'*operatore di ritardo* $L$ che, elevato all'esponente $s$ ed applicato alla generica variabile $z$, la ritarda di $s$ unità temporali

$$L^s z_t = z_{t-s} \tag{2.6.5}$$

Utilizzando tale operatore, la (2.6.3) diventa, considerando che, per semplicità, si usa porre $L^1 = L$,

$$\dot{p}_t^e - \lambda L \dot{p}_t^e = (1-\lambda)\dot{p}_t$$

cioè

$$(1-\lambda L)\dot{p}_t^e = (1-\lambda)\dot{p}_t$$

da cui, adoperando la somma di infiniti termini di una progressione geometrica di ragione $\lambda L$,

$$\frac{1}{(1-\lambda L)} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j L^j \tag{2.6.6}$$

si ottiene di nuovo la (2.6.4)

$$\dot{p}_t^e = \frac{1-\lambda}{(1-\lambda L)}\dot{p}_t = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \dot{p}_{t-j} \tag{2.6.7}$$

In realtà, lo sviluppo in serie di potenze (2.6.6) è comunemente utilizzato, e dimostrato, quando la ragione della progressione è pari ad una costante, ma la sua validità nel caso in cui $L$ sia un operatore viene dimostrata nell'algebra degli operatori. Come è d'uso in algebra, si pone $L^0 = 1$; valgono inoltre le proprietà

$$aL^s + bL^s = (a+b)L^s$$
$$L^s L^v = L^{s+v}$$

con $a$ e $b$ costanti arbitrarie.

Da quanto illustrato segue che $L$ nelle varie operazioni è da considerarsi come una costante; esso sussiste diversamente soltanto se opera su di una variabile con indice temporale $t$, poiché se opera su di un elemento invariabile nel tempo svanisce. Così, se $a$ è una costante, si ha per ogni $s$

$$L^s a = a \tag{2.6.8}$$

e inoltre

$$L^s = L^s 1 = 1 \tag{2.6.9}$$

relazione di uso molto frequente.

L'operatore "differenza prima" $\Delta$, già utilizzato nella (2.2.9), è legato ad $L$ dall'uguaglianza

$$\Delta = 1 - L \tag{2.6.10}$$

Inoltre, si ha

$$\Delta^2 = (1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2 \tag{2.6.11}$$

e più in generale

$$\Delta^s = (1 - L)^s = \ldots$$

Una fattorizzazione molto utile è la seguente

$$\Delta^s = (1 - L)^s = (1 - L)(1 + L + L^2 + \ldots + L^{s-1})$$

che mette in luce come la differenza $s$-esima sia uguale al prodotto della differenza prima per un polinomio in $L$ di grado $s - 1$ con coefficienti tutti uguali all'unità.

## 2.7 La causalità nelle relazioni economiche

*La causalità in un modello di domanda e offerta*

Quando si associano tra di loro delle variabili economiche in un processo di specificazione nasce il problema costituito dalla determinazione delle relazioni di causa ed effetto. Se consideriamo la prima delle (2.5.4), che possiamo scrivere nella forma generale seguente (non necessariamente lineare)

$$q^d = f_1(p) \tag{2.7.1}$$

appare implicito che variazioni di prezzo causino variazioni della quantità di merce domandata nell'unità di tempo. Così, se un monopolista fissa il prezzo ed osserva quanto il mercato domanda, vale la (2.7.1) e si può ritenere che la direzione della causalità vada dal prezzo alla quantità domandata. Ma se il monopolista fissa la quantità di merce offerta ed aspetta quale prezzo risulterà nel mercato, si può porre

$$p = f_2\left(q^s\right) \tag{2.7.2}$$

ritenendosi in tal modo che la direzione della causalità vada dalla quantità offerta al prezzo[12].

Da questi esempi risulta che possiamo arguire che la direzione della causalità sia determinata dall'argomentazione economica e che la formulazione matematica ne sia soltanto una rappresentazione.

Sempre dal lato dell'offerta, se consideriamo la seconda delle (2.5.4) scritta nella forma funzionale

$$q^s = f_3(p) \tag{2.7.3}$$

appare implicito che la direzione della causalità vada dal prezzo alla quantità offerta, ma se consideriamo un modello di equilibrio

$$\begin{cases} q^d = f_1(p) \\ q^s = f_3(p) \\ q^d = q^s \end{cases} \tag{2.7.4}$$

notiamo che le tre variabili $q^d$, $q^s$ e $p$ sono determinate simultaneamente, per cui non appare lecito dire che una causi l'altra.

---

**12** Il concetto di causalità delineato, che è basato sui rapporti che sussistono tra variazioni di variabili, è simile a quello formulato dal Wold (1954), sul quale torneremo tra breve.

*Causalità e curva di Phillips*

Nelle considerazioni svolte al punto precedente alcune equazioni prese singolarmente rispecchiano l'esistenza di relazioni causali nelle ipotesi economiche, mentre il modello di mercato in equilibrio (2.7.4) non sembra poter essere interpretato in senso causale. Argomentazioni simili possono essere proposte in relazione alla curva di Phillips (1958) che il Lipsey (1960) linearizzò (nei parametri) con la formulazione seguente[13]

$$\dot{w}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{k} u_t^{-i} + \alpha_2 \Delta u_t + \alpha_3 \dot{p}_t + \alpha_4 \left(\dot{p}_t^e - \dot{p}_t\right) + \alpha_5 \ln \frac{w_{t-1}}{p_{t-1}} + \alpha_6 t \tag{2.7.5}$$

dove

$w_t$ = salari nominali,

$p_t$ = prezzi al consumo,

$p_t^e$ = prezzi al consumo attese,

$u_t$ = disoccupazione,

$t$ = tempo

ed inoltre il punto sulle variabili denota una differenza prima logaritmica, come nella (2.6.2), e $\Delta$ una differenza prima semplice. L'equazione (2.7.5) è dinamica nel senso descritto nel paragrafo 2.2 e contiene una tendenza lineare crescente rappresentata dal polinomio nel tempo $t$: $\alpha_0 + \alpha_6 t$.

La specificazione (2.7.5) di Lipsey presuppone che sussista un nesso causale teorico con direzione da $\Delta u_t$ a $\dot{w}_t$, mentre la rielaborazione della curva di Phillips fatta da Lucas e Rapping (1969) che partono dalla relazione

$$u_t = \beta_0 + \beta_1 \left( \ln \frac{w_t}{p_t} - \ln \frac{w_{t-1}^0}{p_{t-1}^0} \right) + \beta_2 \ln \frac{p_t}{p_{t-1}^0} \tag{2.7.6}$$

dove lo zero in apice indica il valore permanente della variabile, implica la causazione inversa, dato $p_t$. Lucas e Rapping suppongono, infatti, che i valori permanenti per i salari ed i prezzi derivino da schemi adattivi del tipo (2.6.7) con lo stesso parametro $\lambda$, per cui

$$\Delta \ln p_t^0 = \frac{1-\lambda}{1-\lambda L} \Delta \ln p_t$$

[13] Per la precisione, anche se la prima linearizzazione della curva di Phillips va attribuita a Lipsey (1960), l'inserimento del salario reale ritardato è dovuto all'opera di Sargan (1964).

$$\Delta \ln w_t^0 = \frac{1-\lambda}{1-\lambda L} \Delta \ln w_t$$

dalle quali si trae

$$\ln\left(p_t^0 / w_t^0\right) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda L} \ln\left(p_t / w_t\right)$$

Sostituendo nella (2.7.6) si ottiene

$$u_t = \beta_0 + \beta_1 \ln\left(w_t / p_t\right) + \frac{\beta_1(1-\lambda)}{1-\lambda L} \ln\left(p_{t-1} / w_{t-1}\right) + \frac{\beta_2}{1-\lambda L} \Delta \ln p_t$$

ed ancora, tenendo conto della (2.6.8),

$$\Delta u_t = \beta_0 (1-\lambda) - (1-\lambda) u_{t-1} + \beta_1 \dot{w}_t + (\beta_2 - \beta_1) \dot{p}_t \qquad (2.7.7)$$

dove viene rappresentata la causazione da $\dot{w}_t$ a $\Delta u_t$.

In effetti, da un punto di vista econometrico non è possibile scegliere tra le due direzioni di causalità, vale a dire tra i due modelli (2.7.5) e (2.7.7), sulla base delle singole equazioni soltanto: occorre aggiungere a queste ulteriori equazioni che spieghino le altre variabili ivi contenute.

Ma, più in generale, Desai (1975) ha ritenuto che la curva di Phillips consista nel luogo dei punti di equilibrio della coppia di variabili tasso di variazione dei salari e disoccupazione, per cui se questa argomentazione fosse valida non si avrebbe alcuna relazione di causalità tra di esse.

Da queste indicazioni preliminari si può già dedurre come il concetto di causalità nelle relazioni economiche non sia facilmente definibile; ed infatti illustreremo nel prosieguo alcune impostazioni differenti che al riguardo sono state formulate. Risulta, tuttavia, già sufficientemente chiaro che non si manifestano relazioni di causalità nelle situazioni di equilibrio, mentre è possibile individuarne in quelle di disequilibrio.

*L'impostazione di D. Hume*

Fatte queste esemplificazioni, per esporre molto sinteticamente alcune interpretazioni del concetto di causalità in economia[14] è conveniente risalire a David Hume[15], il quale parte dal presupposto che ciò che è possibile conoscere tramite i sensi è contingente e particolare, e quindi è impossibile costruire una

**14** Più estesamente esposte in Alemanno e Carlucci (1983).

**15** Si veda D. Hume (1739 e 1777); in particolare, nel "Treatise" il libro I, parte III, sez. XIV, e nell'"Enquiry" le sezioni IV e VII. Da questo sono tratti i passi dello Hume che seguono.

affermazione circa una relazione causale tra due eventi: "A un fatto ne segue un altro, ma non possiamo mai osservare un nesso tra di essi. Essi sembrano *congiunti*, ma mai collegati". Questa posizione scettica viene in gran parte superata dallo stesso Hume quando fornisce una giustificazione dell'uso delle relazioni causali basata (i) sulla *ripetizione* del nesso e (ii) sulla *consuetudine* a tale regolarità:

"Perfino dopo un esempio o un esperimento in cui abbiamo osservato un particolare evento seguirne un altro non siamo autorizzati a formulare una regola generale o a dire in anticipo cosa accadrà in casi simili, essendo giustamente considerata temerità imperdonabile giudicare l'intero corso della natura da un singolo esperimento, per quanto accurato e sicuro. Ma quando una particolare specie di eventi è sempre stata congiunta con un'altra, in tutti gli esempi, non ci facciamo ulteriori scrupoli nel prevedere l'una all'apparire dell'altra, e nell'utilizzare quel ragionamento che solo può darci sicurezza su questioni di fatto e di esistenza. Così chiamiamo l'uno 'causa' e l'altro 'effetto'".

Si noti la sequenzialità temporale tra gli eventi che caratterizza la definizione di causalità dello Hume e che era presente soltanto in modo implicito nelle relazioni di domanda e di offerta considerate sopra. Un secondo carattere della definizione è costituito dalla soggettività delle valutazioni di causa e di effetto che sono supposte di pertinenza dell'osservatore.

*La causalità secondo G.H. Orcutt*

Sostanzialmente oggettivista è, al contrario, l'impostazione di G.H. Orcutt (1952 a,b), il quale in due dei lavori che danno inizio agli studi moderni della causalità di economia fornisce una sintetica interpretazione concettuale di nesso causale ed una sua definizione operativa.

L'Orcutt parte dalla necessità del decisore politico di governare l'economia in modo da indirizzarla lungo il sentiero di sviluppo desiderato.

Il decisore "deve essere in grado di osservare le discrepanze tra l'attuale livello delle variabili di interesse ed il livello desiderato di queste variabili. Quindi, se deve portare a compimento qualche cosa, ha la necessità di avere a sua disposizione strumenti per mezzo dei quali modificare il corso effettivo delle variabili"[16].

Questi concetti di governo dell'economia venivano utilizzati nell'epoca pionieristica della politica economica quantitativa e dell'econometria, in tempi nei quali si ponevano e si risolvevano alcuni problemi di fondo relativi ai sistemi di

**16** Si veda Orcutt (1952 a).

equazioni e si differenziavano i concetti di variabile endogena ed esogena, di *variabile obiettivo* e *strumentale*[17].

Arrivato al punto in cui si suppone che sia necessario fornire al decisore politico un insieme di relazioni che permettono di controllare determinate variabili endogene per mezzo delle esogene strumentali, l'Orcutt si trova di fronte alla necessità teorica di definire concettualmente il rapporto tra esogene controllabili ed endogene governate, il nesso, cioè, tra causa ed effetto economici.

Questo argomento è affrontato nel secondo lavoro del 1952 (b), nel quale il nesso causale è definito come una relazione tra eventi asimmetrica: "Se è vero l'evento A, allora è vero l'evento B". Ma questa affermazione non implica che dobbiamo considerare la possibilità che sussista anche la relazione inversa, con causalità da B ad A. La definizione di causalità è soltanto "unidirezionale" (asimmetrica) e "per esprimere una relazione non direzionale in termini di relazioni causali occorrono almeno due relazioni causali".

L'implicazione causale tra A e B non deve essere intesa in senso meccanico, automatico: se A causa B, non necessariamente dobbiamo ritenere che B non possa variare senza che anche A sia cambiato; infatti "quando diciamo che A è una causa di B, intendiamo spesso dire che se A varia, B sarà diverso in modo specifico da ciò che *sarebbe stato* se A non fosse variato. Non escludiamo, comunque, la possibilità di una variazione di entità sconosciuta di B anche in assenza di variazioni di A".

Ignorato nella definizione teorica iniziale, il tempo è in seguito considerato dall'Orcutt come elemento fondamentale per l'utilizzazione operativa del concetto di nesso causale. Al fine di porre le variabili nella loro corretta posizione nell'intelaiatura delle relazioni, non si può fare a meno di ricorrere al loro ordinamento temporale.

*L'impostazione di H. Simon*

La caratterizzazione dell'esogenità e dell'endogenità delle variabili è utilizzata anche da Herbert Simon (1953) per la formalizzazione di una interpretazione della causalità vicina a quella dell'Orcutt ma più rigorosa. La relazione causale è un ente astratto, simmetrico, indipendente in linea di massima dalla cronologia temporale, rappresentato da un modello analitico: "gli ordinamenti causali sono semplicemente delle proprietà del modello dello scienziato, proprietà che sono soggette a variare quando il modello è alterato per adattarsi a nuove osservazioni...".

---

[17] La locuzione "variabile esogena controllabile" è stata coniata da J. Marschack (1950) e quella di "variabile strumentale" da J. Tinbergen (1952).

Suo obiettivo è, dunque, quello di dare delle regole attraverso le quali sia possibile ordinare causalmente le variabili di un modello e non del mondo reale che tale modello vuol rappresentare.

Un suo esempio è chiarificatore: supponiamo che il prezzo di un certo tipo di grano $y_3$ dipenda linearmente dalla quantità di raccolto $y_2$ e che questa sia funzione dell'andamento delle condizioni meteorologiche $y_1$. Tale insieme di relazioni causali può essere rappresentato dal sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \beta_{11} y_1 & = \gamma_1 \\ \beta_{21} y_1 + \beta_{22} y_2 & = \gamma_2 \\ \qquad \beta_{32} y_2 + \beta_{33} y_3 & = \gamma_3 \end{cases} \tag{2.7.8}$$

che è risolvibile se sono conosciuti i parametri $\beta_{ij}$ e $g_i$ $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$. Dalla prima equazione si ottiene $y_1$, che non è funzione delle altre due variabili; sostituendola nella seconda equazione si può risolvere questa rispetto ad $y_2$, ed infine, inserendo nella terza equazione il valore trovato per $y_2$, si ottiene $y_3$. Sussiste allora nelle tre equazioni un ordinamento di "antecedenza" che fa precedere la prima rispetto alle altre due e la seconda rispetto alla terza; esiste, inoltre, un ordinamento causale tra le variabili, per il quale la $y_1$ causa la $y_2$ e questa la $y_3$. Tale ordinamento si fonda su di una causalità asimmetrica e non fa uso del tempo.

In realtà il Simon non nega aprioristicamente la possibilità dell'ordine cronologico e nella seconda parte del saggio del 1953 ammette: "Non c'è connessione necessaria tra l'asimmetria di questa relazione (tra certe variabili) e l'asimmetria temporale, sebbene un'analisi della struttura causale dei sistemi dinamici in econometria ed in fisica dimostrerà che le relazioni ritardate possono essere generalmente interpretate come relazioni causali".

La definizione di causalità del Simon è restrittiva, in quanto necessita di un modello rappresentativo per poter esplicitarsi, ed incontra difficoltà qualora si voglia passare dalla formulazione teorica alle applicazioni.[18]

---

**18** Una di queste difficoltà è dovuta al fatto che, nel caso di modelli di sistemi economici, spesso ad un insieme di osservazioni campionarie non corrisponde un solo insieme di valori dei parametri ma più insiemi diversi. Segue da questo fatto, che rappresenta il problema econometrico dell'*identificazione*, che, dato un modello, non sempre ai dati empirici corrisponde un solo sistema di relazioni causali tra le variabili. Le relazioni tra il significato razionale della causalità ed il problema dell'identificazione sono trattate nel sesto e nel settimo paragrafo del lavoro del 1953. Successivamente il Simon (1955) riconosce che operativamente la causalità da lui definita è discernibile soltanto se il modello su cui si basa è sovraidentificato.

*La causalità secondo H. Wold*

Un'altra impostazione del concetto di causalità è dovuto allo svedese (norvegese di nascita) Wold (1954) che lo interpreta in termini di esperimento controllato: "Una o più variabili sono sotto il controllo dello sperimentatore, il quale, per dei valori di quest'ultime opportunamente scelti, osserva i valori di una o più variabili diverse alle cui variazioni è interessato. Se l'esperimento rivela che una variabile osservata cambia sistematicamente al variare delle variabili controllate, allora questa relazione è un tipico caso di nesso causale".

L'impostazione è dichiaratamente oggettivistica in quanto "replicando l'esperimento, la relazione causale può essere verificata da altri sperimentatori"; tale relazione è sostanzialmente asimmetrica e nell'esperimento la variazione controllata può avvenire sia in modo deterministico che stocastico, cioè in presenza di disturbi aleatori. Se, infine, in certe situazioni, e qui risiede il punto maggiormente sottoposto a critiche, non è possibile effettuare materialmente l'esperimento controllato, si ricorre ad un esperimento fittizio.

Lo stesso Wold, però, si rende conto delle difficoltà pratiche di utilizzare in modo generale la nozione di controllo ed ammette che "relazioni causali e causalità sono concetti teorici, non empirici".

E sorge da questa ammissione una dicotomia del suo pensiero, suddiviso in modo patente tra definizione astratta della causalità e impostazione operativa. Su questo secondo tema ritorneremo nel paragrafo 3.3.

## 2.8 Linearizzazione di modelli non lineari rispetto alle variabili

Le relazioni analitiche esposte in precedenza ci permettono di definire in maniera sistematica alcuni caratteri delle equazioni econometriche. Innanzitutto queste possono rappresentare modelli *semplici* come la funzione del consumo (2.1.1), che è del tipo

$$y = \alpha + \beta x \tag{2.8.1}$$

con una sola variabile esogena, oppure *multipli* come la seconda delle (2.2.9) che fornisce una funzione degli investimenti in dipendenza di due esplicative, il tasso di interesse ed il reddito. Ambedue queste equazioni sono lineari, rispetto sia alle variabili che ai parametri, ma sovente una specificazione accurata della realtà economica produce relazioni non lineari, non facilmente analizzabili appunto a causa della loro non linearità. In questi casi è talvolta possibile linearizzare le equazioni con opportuni procedimenti, di cui diamo nel seguito alcune indicazioni.

La non linearità rispetto alle variabili può essere eliminata con opportune trasformazioni: se nella (2.8.1) l'esogena comparisse elevata anche alla seconda ed alla terza potenza si avrebbe

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \varepsilon x^3 \tag{2.8.2}$$

ma basterebbero le sostituzioni $z_1 = x^2$, $z_2 = x^3$, per ottenere l'equazione lineare nelle variabili

$$y = \alpha + \beta x + \gamma z_1 + \varepsilon z_2$$

Analogamente, se si ponesse la propensione marginale al consumo $\beta$ nella (2.1.1) funzione lineare del tempo

$$\beta = \alpha_0 + \alpha_1 t$$

si otterrebbe una equazione del consumo non lineare nelle variabili (a causa del prodotto $t \cdot y_t$)

$$c_t = \alpha + (\alpha_0 + \alpha_1 t) y_t$$

ma con la sostituzione $z_t = t y_t$ si ritroverebbe la linearità

$$c_t = \alpha + \alpha_0 y_t + \alpha_1 z_t$$

con $\alpha_1 z_t$ che rappresenterebbe il termine correttivo, rispetto al reddito, derivato dalla non costanza della propensione marginale al consumo.

*La tendenza temporale come curva polinomiale deterministica*

Un'equazione del tipo (2.8.2) è frequentemente utilizzata per rappresentare la tendenza temporale mediante una curva polinomiale di ordine $p$ nella variabile $t$

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + ... + \alpha_p t^p \tag{2.8.3}$$

I valori di $p$ più usuali sono uno e due; per $p = 2$ si ha una tendenza parabolica, mentre se $p = 1$ viene rappresentata una tendenza lineare, come nella curva di Phillips (2.7.5).

È interessante notare che operando una differenza prima su di una variabile che contiene una tendenza lineare, questa viene eliminata. Analogo risultato viene conseguito operando con una differenza $\Delta^2$ su di una tendenza parabolica, e così via con differenze $\Delta^p$ su polinomi di grado $p$. A titolo di esempio vediamo che nel caso lineare si ha

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 t \\ \Delta y_t &= (\alpha_0 + \alpha_1 t) - [\alpha_0 + \alpha_1 (t-1)] = \alpha_1 \end{aligned} \tag{2.8.4}$$

ed in quello parabolico

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \\ \Delta y_t &= \alpha_1 + \alpha_2 (2t-1) \end{aligned} \tag{2.8.5}$$

$$\Delta^2 y_t = \Delta\Delta y_t = \alpha_1 + \alpha_2 (2t-1) - \{\alpha_1 + \alpha_2 [(2(t-1)-1)]\} = 2\alpha_2 \tag{2.8.6}$$

> *Osservazione* 2.13 – Si lascia al lettore la verifica che il risultato (2.8.6) può essere ottenuto sfruttando l'operatore di ritardo $L$ come indicato nella (2.6.11)
>
> $$\Delta^2 y_t = (1-L)(1-L) y_t = (1-2L+L^2) y_t = 2\alpha_2$$

*Semplici forme di equazioni non lineari nelle variabili*

Una forma semplificata della curva di Phillips (2.7.5) può essere scritta nel modo

$$\dot{w}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{k} (u_t^{-1})^i \tag{2.8.7}$$

nel quale la non linearità rispetto alle variabili riguarda la presenza del reciproco $u_t^{-1}$ e le potenze dell'esplicativa $u_t^{-1}$, già rilevate nella (2.8.2). Effettuando nella (2.8.7) le sostituzioni $y = \dot{w}_t$ e $u_t^{-i} = x_i$, $i = 1,2,...,k$, si ottiene l'equazione lineare nelle variabili

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k$$

Se nella (2.8.7) si pone $k=1$ si ottiene la forma più semplice della curva di Phillips

$$\dot{w}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{u_t} \tag{2.8.8}$$

che lega il tasso di variazione percentuale dei salari con l'inverso della disoccupazione; ponendo $y=\dot{w}_t$ e $x=u_t$ si ottiene il modello *reciproco*

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{x} \tag{2.8.9}$$

D'altro canto ponendo $y=w_t / w_{t-1}$ e $x=u_t$ si ha il modello *reciproco logaritmico*

$$\ln y = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{x} \tag{2.8.10}$$

mentre con le posizioni $y = w_t / w_{t-1}$ e $x = u_t^{-1}$ si arriva al *semilogaritmico*

$$\ln y = \alpha_0 + \alpha_1 x \tag{2.8.11}$$

*Il sentiero di equilibrio di lungo periodo in forma continua*

L'equazione (2.8.11) è utile per rappresentare lo "steady state" nel tempo continuo; infatti se poniamo in essa $t=x$, otteniamo

$$\ln y = \alpha_0 + \alpha_1 t \tag{2.8.12}$$

cioè

$$y = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 t) \tag{2.8.13}$$

dove $\alpha_1 = (dy_t / dt)/ y_t$ rappresenta il tasso istantaneo di crescita di $y$ al tempo $t$. Per $t=0$ si ottiene

$$y_0 = \exp \alpha_0$$

per cui la (2.8.13) diventa

$$y_t = y_0 \cdot \exp(\alpha_1 t)$$

che rappresenta l'analogo nel tempo continuo della (2.2.6) dove $\gamma > 0$ costituisce il saggio di crescita costante di $y_t$ per unità di tempo. Per trovare la relazione esistente tra $\gamma$ ed $\alpha_1$ basta prendere il logaritmo naturale della (2.2.6)

$$\ln y_t = \ln y_0 + t \ln(1+\gamma) \tag{2.8.14}$$

e confrontando questa con la (2.8.12) si ottiene

$$\alpha_1 = \ln(1+\gamma) \tag{2.8.15}$$

che permette di calcolare $\alpha_1$ in funzione di un qualsiasi $\gamma$.

*Il modello nei logaritmi delle variabili*

La funzione di produzione di tipo Cobb-Douglas (2.4.5) costituisce un esempio di modello non lineare nelle variabili che è anche non lineare nei parametri. Prendendo i logaritmi naturali dei due membri dell'equazione si ottiene

$$\ln x = \ln\gamma + \alpha \ln l + \beta \ln k \tag{2.8.16}$$

che è ora lineare nei parametri $\ln\gamma$, $\alpha$, $\beta$, e nei *logaritmi* delle variabili; per questo motivo è detto *log-lineare*. Poiché è $\beta = 1 - \alpha$, i rendimenti di scala sono costanti ed effettuando la sostituzione si ottiene

$$\ln\frac{x}{k} = \ln\gamma + \alpha \ln\frac{l}{k}$$

passando così da un modello log-lineare con due variabili esplicative ad un altro, anch'esso log-lineare, nell'unica esplicativa $\ln(l/k)$.

Anche l'equazione della domanda di moneta (2.2.7) è log-lineare; il tasso di interesse non è logaritmizzato poiché è costituito di per sé da una percentuale, come già osservato.

*Riparametrizzazioni*

Si noti che l'imposizione del vincolo $\beta = 1 - \alpha$ ci permette di esprimere la (2.8.16) in un modo equivalente dal punto di vista teorico, ma differente dal punto di vista empirico, in particolare perché il parametro $\beta$ viene eliminato. Una trasformazione di questo genere, in virtù della quale un'equazione econometrica viene espressa in funzione di un diverso insieme di parametri, pur mantenendo le sue proprietà economiche, viene detta *riparametrizzazione*.

*La trasformazione delle variabili di Box-Cox*

I modelli esposti nei punti precedenti possono essere considerati come casi particolari dell'equazione

$$y^* = \alpha + \beta x^* \tag{2.8.17}$$

dove

$$y^* = \begin{cases} \dfrac{y^{\delta_1} - 1}{\delta_1} & \delta_1 \neq 0 \\ \ln y & \delta_1 = 0 \end{cases}; \qquad x^* = \begin{cases} \dfrac{x^{\delta_2} - 1}{\delta_2} & \delta_2 \neq 0 \\ \ln x & \delta_2 = 0 \end{cases}$$

sono trasformazioni dette di Box-Cox[19]. In queste il parametro $\delta$ può assumere un valore reale qualsiasi, ma è bene ricordare che nel contesto econometrico $\delta_1$ e $\delta_2$ devono assumere valori tali che alla (2.8.17) si possa dare un'interpretazione economica.

> *Osservazione 2.14* – Questa interpretazione non è necessaria quando si è interessati alla sola previsione; in questo caso $\delta_1$ e $\delta_2$ possono assumere valori qualsiasi.

Analizziamo ora, per ciascuno dei modelli precedenti, gli andamenti della propensione marginale $dy/dx$, della propensione media $y/x$ e dell'elasticità $\eta$ della funzione $y = f(x)$ che può essere considerata come il rapporto delle due propensioni. Questi caratteri sono riassunti nella tavola 2.1.

| | Propensione | | Elasticità |
|---|---|---|---|
| Modello | marginale | media | (puntuale) |
| | $\frac{dy}{dx}$ | $\frac{y}{x}$ | $\eta = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$ |
| lineare: $y = \alpha + \beta x$ | $\beta$ | $\alpha/x + \beta$ | $\frac{\beta x}{\alpha + \beta x}$ |
| reciproco: $y = \alpha + \beta \frac{1}{x}$ | $-\beta/x^2$ | $\alpha/x + \beta/x^2$ | $\frac{\beta}{\alpha x + \beta}$ |
| semilogaritmico: $\ln y = \alpha + \beta x$ | $\beta \cdot \exp(\alpha + \beta x)$ | $\frac{1}{x}\exp(\alpha + \beta x)$ | $\beta x$ |
| reciproco logaritmico: $\ln y = \alpha + \beta \frac{1}{x}$ | $-\frac{\beta}{x^2}\exp\left(\alpha + \beta\frac{1}{x}\right)$ | $\frac{1}{x}\exp\left(\alpha + \beta\frac{1}{x}\right)$ | $-\beta/x$ |
| log-lineare: $\ln y = \alpha + \beta \ln x$ | $\beta \cdot x^{\beta-1}\exp(\alpha)$ | $x^{\beta-1}\exp(\alpha)$ | $\beta$ |

*Tavola 2.1 - Propensione marginale, propensione media ed elasticità nei modelli ottenuti sfruttando la trasformazione di Box-Cox.*

**19** Si vedano Box e Cox (1964). Il caso della trasformazione logaritmica, in realtà, non è differente da quello che si ha per $\delta \neq 0$, poiché è ottenibile applicando il primo teorema di de l'Hôpital con $\delta \to 0$.

*Il modello lineare*

È ottenuto dalla (2.8.17) per $\delta_1 = \delta_2 = 1$. La propensione marginale è costante mentre quella media e l'elasticità variano in funzione di $x$. La propensione media è crescente o decrescente a seconda del segno di $\alpha$ e tende a $\beta$ al crescere di $x$; la convergenza è tanto più veloce quanto più piccolo è il valore assoluto di $\alpha$. L'elasticità tende all'unità per $x \to \infty$ e la convergenza è tanto più veloce quanto più piccolo è il valore assoluto di $\alpha$ rispetto alla $x$.

> *Osservazione* 2.15 - Nel caso di $\alpha$ trascurabile rispetto ai valori assunti dalla $x$ il modello lineare può essere considerato con elasticità approssimativamente uguale a +1.

*Il modello reciproco*

È ottenuto per $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = -1$. Ambedue le propensioni e l'elasticità dipendono da $\beta$ e sono funzioni della $x$. Per $x \to 0$ le propensioni tendono all'infinito ed $\eta \to 1$; per $x \to \infty$ sia le prime che $\eta$ tendono a zero.

*Il modello semilogaritmico*

È ottenuto per $\delta_1 = 0$ e $\delta_2 = 1$. Come nel modello precedente ambedue le propensioni e l'elasticità dipendono da $\beta$ e sono funzioni della $x$. Per $x \to 0$ la propensione marginale tende alla costante $\beta \cdot \exp(\alpha)$, quella media all'infinito ed $\eta \to 0$. Per $x \to \infty$ la propensione marginale tende all'infinito, quella media a zero e l'elasticità tende all'infinito positivo o negativo a seconda del segno di $\beta$.

Come si è già osservato, se in questo modello la variabile esplicativa $x$ è una tendenza lineare $t$ il coefficiente $\beta$ rappresenta il saggio istantaneo di crescita della $y$ (si veda la (2.8.13). Viceversa, se $x$ è una variabile economica, il $\beta$ del modello semilogaritmico rappresenta la *semielasticità* di $y$ a $x$. L'elasticità, a sua volta, è variabile in funzione del livello della $x$ e si ottiene dal prodotto $\beta x$, come si verifica direttamente (si veda la tavola 2.1).

*Il modello log-lineare*

È ottenuto per $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Ambedue le propensioni dipendono sia da $\alpha$ che da $\beta$ e sono funzioni della $x$. Se $\beta = 1$, esse sono costanti rispetto alla $x$; se $0 < \beta < 1$, decrescono tendendo a zero per $x \to \infty$, mentre crescono tendendo all'infinito per $x \to 0$. Per $\beta > 1$ le propensioni crescono tendendo all'infinito per $x \to \infty$ e decrescono tendendo a zero per $x \to 0$.

L'elasticità è pari alla costante $\beta$.

## 2.9 Analisi dimensionale

*Dimensioni fondamentali*

Se si considera la relazione

$$p = \alpha + \beta q^s \qquad \beta < 0 \qquad (2.9.1)$$

cui si trova di fronte un monopolista, con $p$ prezzo nel mercato e $q$ quantità di beni che egli ritiene di poter vendere nel mercato per ogni unità di tempo, non soltanto la quantità nel membro a destra deve essere uguale a quella del membro a sinistra, ma, di più, poiché a sinistra c'è un prezzo, anche la quantità $\alpha + \beta q^s$ deve, nella sua *essenza*, consistere in un prezzo.

In altre parole, i due membri dell'equazione (2.9.1) devono avere la stessa dimensione, che definiamo come l'*essenza primitiva* di una quantità. Da questa caratterizzazione deriva che una dimensione è costituita da un insieme di quantità addizionabili, come i tempi, che formano una dimensione indicata con $[T]$, come le quantità monetarie, che formano la dimensione $[M]$, le risorse $[R]$ e le soddisfazioni $[S]$.

Chiamiamo *fondamentali* le quattro dimensioni $[T]$, $[M]$, $[R]$ ed $[S]$ elencate, in quanto è possibile esprimere tutte le altre in funzione di queste.

Naturalmente queste quattro dimensioni hanno una validità molto generale che in alcuni casi può risultare eccessiva: è allora opportuno restringere il loro livello di generalità ampliandone il numero; ad esempio, considerando più tipi di moneta o di risorse[20].

Per le dimensioni valgono le proprietà additiva e moltiplicativa; cioè se le quantità $a$ e $b$ hanno la stessa dimensione $[X]$, e diciamo che

$$a \in [X], \qquad b \in [X]$$

allora

$$a \pm b \in [X] \qquad (2.9.2)$$

Inoltre se

$$c \in [Y]$$

valgono anche le

[20] La restrizione delle dimensioni fondamentali alle quattro indicate è, dunque, soggettiva.

$$ac \in [XY] \ , \ a/c \in [XY^{-1}] \tag{2.9.3}$$

In questo caso, se $[X]$ ed $[Y]$ sono dimensioni fondamentali, le dimensioni $[XY]$ di $ac$ e $[XY^{-1}]$ di $a/c$ sono dette *derivate*.

Utilizzando queste definizioni torniamo a considerare l'equazione (2.9.1): il prezzo è ovviamente una quantità monetaria divisa per una quantità reale (risorsa), per cui $p \in [MR^{-1}]$, mentre la quantità offerta $q^s$ ha le dimensioni di una risorsa divisa per un tempo, $q^s \in [RT^{-1}]$. Segue quindi che

$$a \in [MR^{-1}] \qquad \text{e} \qquad b = \frac{dp}{dq^s} \in [MR^{-2}T]$$

affinché il prodotto $\beta q^s$ abbia le dimensioni di un prezzo e l'equazione (2.9.1) sia dimensionalmente esatta. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
[MR^{-1}] &= [MR^{-1}] + [MR^{-2}T][RT^{-1}] \\
[MR^{-1}] &= [MR^{-1}] + [MR^{-1}] \\
[MR^{-1}] &= [MR^{-1}]
\end{aligned}$$

avendo fatto uso delle (2.9.2) e (2.9.3).

Consideriamo ora, come altro esempio, l'elasticità della domanda rispetto al prezzo

$$\eta = \frac{dq^d}{dp} \cdot \frac{p}{q^d}$$

Si ha che

$$\frac{dq^d}{dp} \in \frac{[RT^{-1}]}{[MR^{-1}]}$$

e d'altro canto è

$$p/q^d \in [MR^{-1}]/[RT^{-1}]$$

per cui

$$\eta \in \frac{[RT^{-1}] \cdot [MR^{-1}]}{[MR^{-1}] \cdot [RT^{-1}]} = [1]$$

cioè l'elasticità della domanda rispetto al prezzo, come del resto ogni altra elasticità, è *senza dimensioni*. Per una quantità adimensionale si scrive appunto

$$a \in [1]$$

*Variabili di stock e variabili di flusso*

Un tasso di interesse ha le dimensioni di una moneta ricevuta in un lasso di tempo, divisa per il capitale che è ancora una quantità monetaria, per cui

$$r \in \frac{\left[MT^{-1}\right]}{\left[M\right]} = \left[T^{-1}\right] \tag{2.9.4}$$

In altre parole, la dimensione del tasso d'interesse è quella dell'inverso di un tempo.

Questo esempio permette di osservare una caratteristica che distingue le *variabili di flusso* da quelle *di stock* (o *di fondo*): le prime hanno una dimensione che incorpora $\left[T^{-1}\right]$, mentre la dimensione delle seconde è da questa indipendente. Analoga distinzione vale per le *costanti*, che possono essere anch'esse di stock o di flusso. Il tasso di interesse, come si vede dalla (2.9.4), ha la dimensione di una variabile di flusso divisa per una di stock.

*La soddisfazione*

La dimensione fondamentale $\left[S\right]$ è connessa alla soddisfazione che deriva dal possedere un bene o dall'usufruire di un certo servizio. L'utilità $u$ ad essa associata ha la dimensione della soddisfazione stessa ottenuta in un intervallo temporale determinato, per cui si ha

$$u \in \left[ST^{-1}\right]$$

che mostra chiaramente come l'utilità sia un flusso.

Supponiamo ora di considerare un consumatore che possa consumare soltanto due beni $c_1$ e $c_2$, che facciamo corrispondere dimensionalmente a due risorse diverse, $R_1$ ed $R_2$. Valgono allora le dimensioni

$$c_1 \in \left[R_1 T^{-1}\right],\ c_2 \in \left[R_2 T^{-1}\right]$$

e se la funzione di utilità del consumatore è

$$u = f\left(c_1, c_2\right)$$

è possibile stabilire la dimensione dell'utilità marginale rispetto ai due beni

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} \in \frac{\left[ST^{-1}\right]}{\left[R_1 T^{-1}\right]} = \left[SR_1^{-1}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_2} \in \frac{\left[ST^{-1}\right]}{\left[R_2 T^{-1}\right]} = \left[SR_2^{-1}\right]$$

nonché quella del saggio marginale sostituzione

$$\frac{\partial f / \partial c_1}{\partial f / \partial c_2} \in \frac{\left[SR_1^{-1}\right]}{\left[SR_2^{-1}\right]} = \left[R_1^{-1} R_2\right]$$

che è indipendente dalla soddisfazione. Da queste relazioni segue che l'utilità marginale dipende dalla misurabilità dell'utilità (attraverso $[S]$), mentre il saggio marginale di sostituzione è da questa indipendente.

*Verifiche dimensionali delle equazioni*

Tramite l'analisi dimensionale è possibile controllare la corretta specificazione di una equazione, non nel senso delle caratteristiche delle variabili come effettuato nel paragrafo 2.2 bensì in quello dei contenuti dimensionali. Vediamo alcuni esempi di questa verifica.

Nell'equazione di scambio di Irving Fischer

$$mv = pb \tag{2.9.5}$$

$m$ indica lo stock di moneta, $v$ la sua velocità di circolazione, $p$ è il livello dei prezzi e $b$ è il flusso di beni e servizi in un dato periodo di tempo.

I beni e servizi hanno la dimensione di una risorsa $[R]$ per cui le transazioni $b$ hanno la dimensione derivata $\left[RT^{-1}\right]$; il livello dei prezzi ha, come già visto, le dimensioni $\left[MR^{-1}\right]$ ed $m$ ovviamente $[M]$. Per quanto riguarda la velocità di circolazione, questa indica il numero medio di volte, in un dato periodo di tempo, in cui la moneta cambia di mano, per cui le sue dimensioni sono un numero puro diviso per un tempo, $v \in \left[T^{-1}\right]$. Si ha quindi

$$[M] \cdot \left[T^{-1}\right] = \left[MR^{-1}\right] \cdot \left[RT^{-1}\right] \text{ cioè } \left[MT^{-1}\right] = \left[MT^{-1}\right]$$

e quindi l'equazione (2.9.5) è dimensionalmente esatta.

Si osservi che nella dimensione "risorse" $[R]$ si pongono beni e servizi non omogenei tra di loro nel senso che sono misurati con unità diverse. È evidente, ad esempio, che non si possono sommare tra di loro automobili e cavolfiori. In realtà nell'analisi dimensionale, che è utilizzata per verificare la corretta specificazione delle equazioni, non si effettuano addizioni in senso fisico o monetario, ma semplicemente si sommano *tipi* di variabili e costanti a *tipi* omogenei. Quindi se la risorsa, "automobili" ha le dimensioni $[R]$ ed anche il cavolfiore ha per convenzione la stessa dimensione, queste due risorse sono *dimensionalmente* sommabili[21].

---

**21** Naturalmente se si è riluttanti ad accettare questi concetti è sempre possibile far ricorso ad un "numerario", che può essere una *misura monetaria* o una di *utilità* o un bene qualsiasi scelto come unità di misura.

Per illustrare un secondo esempio di verifica della corretta specificazione di una equazione, poniamo $\beta = 1$ nella (2.9.1) ottenendosi

$$p = \alpha + q^s$$

e poiché $p \in \left[MR^{-1}\right]$, $q^s \in \left[RT^{-1}\right]$ ed $\alpha \in \left[MR^{-1}\right]$, risulta evidente che $\alpha$ e $q^s$ non possono essere addizionati perché dimensionalmente non omogenei. Manca un fattore $\beta$ che moltiplica $q^s$ tale che $\beta q^s \in \left[MR^{-1}\right]$; segue che questo fattore $\beta$ deve avere la dimensione $\left[MR^{-1}\right] / \left[RT^{-1}\right] = \left[MR^{-2}T\right]$.

> *Osservazione 2.16* – L'analisi dimensionale indica semplicemente che *qualcosa* manca nell'equazione e che questo qualcosa deve avere una data dimensione; è compito dell'analisi economica determinare *che cosa* manca.

> *Osservazione 2.17* – L'esattezza dimensionale degli elementi di una equazione costituisce soltanto una condizione necessaria per la corretta specificazione dell'equazione stessa, che pertanto può essere mal specificata per altre ragioni.

## 2.10 Esercizi

2.1 - Si determini la forma ridotta del modello (2.3.4) e se ne calcolino i moltiplicatori per il consumo e per il reddito rispetto alla spesa pubblica.

2.2 - Si sviluppino le differenze $\Delta^3$ e $\Delta^4$ come nella (2.6.11).

2.3 - Effettuare la verifica descritta nell'osservazione 2.3.

2.4 - Si determini la forma ridotta del modello costituito dalle (2.4.2), (2.1.4) e dalla

$$y = c + i + g$$

e si calcoli il moltiplicatore per il reddito rispetto alla spesa pubblica.

2.5 - Nel modello dell'esercizio 2.4 si supponga che le autorità di governo scelgano il reddito $y$ come variabile obiettivo e ne impongano di conseguenza un valore desiderato. Sotto l'ipotesi che anche il valore di $v$ sia stabilito esogenamente, si determini il valore della spesa pubblica $g$ necessario per raggiungere l'obiettivo fissato.

2.6 - Si analizzi il modello formato dalle (2.1.4) e (2.4.2), nonché dalle ulteriori tre equazioni

$$\begin{aligned} i &= \gamma + \delta y \\ z &= \eta + \theta y \\ y &= c + i + g + x - z \end{aligned}$$

dove $z$ sono le importazioni, $x$ sono le esportazioni e nella relazione di bilancio è introdotto l'equilibrio della bilancia dei pagamenti. Le variabili $x$ e $g$ sono considerate esogene ed è $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \theta < 1$.

## 2.11 Riferimenti bibliografici

Alemanno, S., Carlucci, F. [1983], "Analisi teoriche e definizioni operative della causalità in economia", *Note Economiche*, n. 2, pp. 42-74.

Box, G.E.P., Cox, D.R. [1964], "An analysis of transformations", *Journal of the Royal Statistical Society*, *Series B*, **26**, pp. 211-243.

Desai, M. [1975], "The Phillips Curve: a revisionist interpretation", *Economica*, **42**, pp. 1-19.

Duesenberry, J.S. [1949], *Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior*, Cambridge, Massachussets: Harvard University Press.

Frisch, R. [1936-36], "On the notion of equilibrium and disequilibrium", *Review of Economic Studies*, **3**, pp. 100-106.

Hume, D. [1739], *A Treatise of Human Nature*, ristampa a cura di E.C. Mossner, Penguin Books, 1969.

Hume, D. [1777], *An Enquiry Concerning Human Understanding*, ristampa in *Enquiries Concerning Human Understanding and Concerning the Principles of Morals*, a cura di L.A. Selby-Bigge, Oxford: Clarendon Press, 1975.

Johnston, J. [1984], *Econometric methods*, Singapore: McGraw-Hill.

Keynes, J.M. [1936], *The General Theory of Employment, Interest, and Money*, London: Macmillan.

Lipsey, R.G. [1960], "The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1862-1957: a further analysis", *Economica*, **27**, pp. 1-31.

Lucas, R.E., Rapping, L.A. [1969], "Price expectations and the Phillips curve", *American Economic Review*, **59**, pp. 342-349.

Marschak, J. [1950], "Statistical inference in economics: an introduction", in *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, a cura di T.C. Koopmans, Cowles Commission Monograph n. 10, 4° ristampa, New York: Wiley, 1962.

Orcutt, G.H. [1952a], "Toward partial redirection of econometrics", *Review of Economics and Statistics*, **34**, pp. 195-213.

Orcutt, G.H. [1952b], "Actions, consequences and causal relations", *Review of Economics and Statistics*, **34**, pp. 305-313.

Phillips, A.W.H. [1958], "The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1861-1957", *Economica*, **25**, pp. 283-299.

Sargan, J.D. [1964], "Wages and prices in the United Kingdom: a study in econometric methodology", in P.E. Hart, G. Mills e J.K. Whitaker (a cura di), *Econometric Analysis for National Economic Planning*, London: Butterworths.

Simon, H. [1953], "Causal ordering and identifiability", in *Studies in Econometric Method*, a cura di W.C. Hood e T.C. Koopmans, Cowles Commission Monograph n. 14, pp. 49-74.

Simon, H. [1955], "Causality and econometrics: comment", *Econometrica*, **23**, pp. 193-195.

Spanos, A. [1986], *Statistical Foundations of Econometric Modelling*, Cambridge: Cambridge University Press.

Tinbergen, J. [1939], *Statistical Testing of Business Cycle Theories*, vol. 1, Geneva: League of Nations.

Tinbergen, J. [1952], *On the Theory of Economic Policy*, Amsterdam: North Holland.

Wold, H. [1954], "Causality and econometrics", *Econometrica*, **22**, pp. 162-177.