3 MODELLI STATICI LINEARI

Indice del capitolo

3.1 Forma strutturale generale dei modelli statici lineari

Il modello keynesiano costituito dalla (2.1.4) e dall'identità ex-post tra il reddito e la somma del consumo e delle spese autonome

$$\begin{cases} c = \alpha + \beta(y - v) \\ y = c + i \end{cases} \qquad 0<\alpha,\ 0<\beta<1 \qquad (3.1.1)$$

è costituito da due equazioni con due variabili endogene, y , c , e due esplicative, i e v , e può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} c & -\beta y & +\beta v & & -\alpha = 0 \\ -c & +y & & -i & = 0 \end{cases}$$

colonna delle intercette
colonna della i
colonna della ν
colonna della y
colonna della c

nella quale i termini delle equazioni sono incolonnati in funzione delle medesime variabili, prima le endogene e poi le esplicative. Ponendo

$$y_1 = c\ ,\ y_2 = y\ ,\ x_1 = v\ ,\ x_2 = i,\ x_3 = 1\ ,$$

il sistema (3.1.1) viene scritto nella forma seguente

$$\begin{cases} y_1 & -\beta y_2 & +\beta x_1 & +0x_2 & -\alpha x_3 & = 0 \\ -y_1 & +y_2 & +0x_1 & -x_2 & +0x_3 & = 0 \end{cases} \qquad (3.1.2)$$

caso particolare della forma strutturale generale dei sistemi lineari

$$\begin{cases} \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + ... + \beta_{1g}y_g + \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + ... + \gamma_{1k}x_k = 0 \\ \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + ... + \beta_{2g}y_g + \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + ... + \gamma_{2k}x_k = 0 \\ \quad ... \qquad\qquad ... \qquad\qquad ... \\ \beta_{g1}y_1 + \beta_{g2}y_2 + ... + \beta_{gg}y_g + \gamma_{11}x_1 + \gamma_{g2}x_2 + ... + \gamma_{gk}x_k = 0 \end{cases} \qquad (3.1.3)$$

costituita da g equazioni e quindi da g endogene y_j , $j = 1,2,...,g$, nonché da k variabili esogene, x_l , $l = 1,2,...,k$. In forma più compatta tale sistema può essere scritto nel modo seguente

$$\sum_{j=1}^{g} \beta_{ij} y_j + \sum_{l=1}^{k} \gamma_{il} x_l = 0 \qquad i = 1,2,..., g$$

dove l'indice i indica la i-esima equazione.

Naturalmente non tutte le variabili endogene ed esogene compaiono in ogni equazione, cosicché alcuni parametri sono nulli. Se inoltre le equazioni strutturali posseggono il *termine noto* (o *intercetta*), si può porre una variabile esogena, ad esempio la k-esima, uguale all'unità, in modo che i termini noti siano dati dalle costanti γ_{ik}, $i = 1,2,\ldots,g$.

3.2 Forma matriciale delle equazioni strutturali

Il sistema (3.1.3) delle equazioni scritte nella forma strutturale generale può essere esposto anche nel modo matriciale seguente

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1g} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{g1} & \beta_{g2} & \cdots & \beta_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{g1} & \gamma_{g2} & \cdots & \gamma_{gk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

vale a dire, in forma compatta,

$$\mathbf{By} + \mathbf{Gx} = \mathbf{0} \tag{3.2.2}$$

dove $\mathbf{B}$ è la matrice di ordine $g \times g$ dei parametri β_{ij}, $\mathbf{G}$ è la matrice di ordine $g \times k$ dei parametri, $\mathbf{y}$ è il vettore (colonna) delle variabili endogene, $\mathbf{x}$ è il vettore (colonna) delle k esogene e $\mathbf{0}$ è il vettore con elementi nulli.

Il sistema (3.1.1) scritto nella forma (3.2.1) diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & -\alpha \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

come facilmente si controlla, mentre il sistema (2.3.5) in cui si è utilizzata la funzione del consumo (2.1.4) e il tasso è stato sostituito dal suo esponenziale, omettendo l'indice t,

$$\begin{cases} c = \alpha + \beta(y - v) \\ i = \gamma + \delta \exp r + \varepsilon y \\ y = c + i + g \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha > 0 & , & 0 < \beta < 1 \\ \gamma > 0 & , & \delta < 0 \end{matrix} \tag{3.2.4}$$

possiede tre variabili endogene, che possiamo considerare c, i, y, e tre esogene, le restanti r, g, v, cosicché può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} c & & -\beta y & & & +\beta v & -\alpha = 0 \\ & i & -\varepsilon y & -\delta \exp r & & & -\gamma = 0 \\ -c & -i & +y & & -g & & = 0 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

e ponendo

$$y_1 = c \;,\; y_2 = i \;,\; y_3 = y \;,\; x_1 = \exp r \;,\; x_2 = g \;,\; x_3 = v \;,\; x_4 = 1 \;,$$

nell'altra matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & -\varepsilon \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta & -\alpha \\ -\delta & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.6}$$

Osservazione 3.1 – La matrice dei coefficienti **B** nella (3.2.3) e nella (3.2.6) ha gli elementi della diagonale principale tutti uguali all'unità. Questo fatto, che corrisponde a normalizzare le equazioni in modo tale che sia uguale ad uno il coefficiente della i-esima variabile endogena nella i-esima equazione è una *semplice convenzione* utile per indicare che la i-esima equazione è intesa a determinare la i-esima variabile endogena.

Osservazione 3.2 – Il modello (3.2.4) contiene una funzione del consumo, una degli investimenti (privati) ed una condizione di equilibrio ex post.

3.3 La partizione in blocchi ed i modelli ricorsivi

Le partizioni in blocchi della matrice dei parametri

Se nella matrice dei coefficienti $\mathbf{B}$ del sistema (3.2.6) poniamo $\varepsilon = 0$, essa diventa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.1}$$

e si ha che la variabile endogena i non è determinata mediante altre endogene, mentre questo fatto non sussiste per c né per y; questa situazione corrisponde nella matrice $\mathbf{B}$ all'esservi tutti zeri a destra dell'elemento β_{22}.

Si dice in questo caso che nel modello c'è una *partizione in due blocchi*, in quanto il sistema lineare può essere risolto in due passi distinti. In un primo si determina la variabile endogena i tramite le esogene; nel secondo passo si determinano le variabili endogene c ed y tramite le esogene ed il valore trovato di i. In altre parole non c'è necessità che le variabili endogene siano determinate simultaneamente.

Nel caso in cui la matrice dei parametri $\mathbf{B}$ sia del terzo ordine, si possono avere le tre partizioni seguenti

$$\underset{a)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 1 & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{b)}{\begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 1 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{c)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 1 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 1 \end{bmatrix}}$$

Nel caso $a)$ si determina l'endogena y_1 nel primo blocco ed y_2, y_3 congiuntamente nel secondo utilizzando il valore trovato di y_1; nel caso $b)$ si determinano y_1 ed y_2 simultaneamente nel primo blocco e poi i loro valori sono utilizzati nel secondo per determinare y_3. Nel caso $c)$, infine, si hanno tre blocchi con determinazione in sequenza di y_1, y_2 ed y_3, ed il modello relativo è detto *ricorsivo*[1].

> *Osservazione 3.3* – La matrice (3.3.1) costituisce un caso di partizione di tipo $a)$, fatti gli appropriati spostamenti delle righe e delle colonne, cioè delle equazioni e delle incognite nel sistema (3.2.6), con $\varepsilon = 0$.

1 Il termine *modello ricorsivo* dovuto al Wold. Si veda a tale proposito Wold (1954).

Un modello a due settori ricorsivo

Un esempio di matrice **B** del tipo *c*) ma di ordine cinque si ha nel modello seguente, formato da due settori: il *reale* dato dalle equazioni (3.2.4) ed il *monetario*

$$\begin{aligned} m^d &= \mu y + \eta \exp r \\ m^s &= m^s \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

comprendente una relazione lineare che esprime la quantità di moneta domandata in funzione del reddito e del tasso di interesse, ed una seconda condizione di equilibrio ex post che uguaglia la moneta offerta a quella domandata. Nell'ipotesi che le variabili esogene siano v, m^s ed r, la forma strutturale del modello può essere scritta nel modo seguente

$$\begin{cases} m^d & & & & & & - m^s & = 0 \\ -\dfrac{1}{\mu} m^d & + y & & & & + \dfrac{\eta}{\mu} \exp r & & = 0 \\ & - \varepsilon y & + i & & & - \delta \exp r & - \gamma & = 0 \\ & - \beta y & & + c & & + \beta \nu & - \alpha & = 0 \\ & - y & + i & + c & + g & & & = 0 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

che in forma matriciale diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^d \\ y \\ i \\ c \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ +\dfrac{\eta}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & +\beta & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp r \\ v \\ m^s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.4}$$

Questo modello può essere risolto in maniera *ricorsiva*, determinando con la prima equazione del sistema (3.3.3) la quantità di moneta domandata in funzione di quella offerta, esogena; sostituendo il valore trovato nella seconda della (3.3.3) ed utilizzando la variabile esogena tasso di interesse si calcola il reddito y, che sostituito nella terza permette di determinare gli investimenti privati. Il consumo è direttamente determinato dal reddito e dalle imposte, e infine anche la spesa pubblica è calcolata conoscendo i consumi, investimenti privati e reddito.

I modelli ricorsivi a catena causale di Wold e Strotz

Il carattere ricorsivo di alcuni sistemi di equazioni fu utilizzato da H. Wold e R.H. Strotz per rappresentare analiticamente una struttura di legami di causalità. Essi partono dal presupposto che il concetto di causalità sia "primitivo" e che nessuno abbia il diritto di monopolio sulla sua definizione[2]. Quando, tuttavia, si costruiscono modelli esplicativi della realtà, ad essi è necessario attribuire una interpretazione causale e questo può essere fatto, secondo i due autori, soltanto se il sistema di equazioni è ricorsivo. Il sistema (3.3.3), come già osservato nel paragrafo precedente, lo è, e tale è anche il modello utilizzato (2.7.8) dal Simon, che può essere scritto nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \tag{3.3.5}$$

dove la matrice dei parametri delle variabili contiene tutti zeri sopra la diagonale principale.

Dunque la caratteristica essenziale del modello (3.3.5), detto *a catena causale*, è la triangolarità della matrice dei coefficienti delle variabile endogene; in questo caso la matrice è detta *triangolare inferiore*; il sistema (3.3.5) può essere anche scritto con la matrice dei coefficienti *triangolare superiore*, cioè con valori nulli al di sotto degli elementi della diagonale principale. Nel caso generale (3.2.1) della forma strutturale delle equazioni si ha una rappresentazione causale secondo Wold e Strotz se la matrice dei parametri **B** è triangolare. Se questa triangolarità non sussiste, il sistema di equazioni è detto *interdipendente* e secondo i due autori non può rappresentare una struttura causale salvo che in una accezione particolare, data dalla causalità esistente tra le variabili endogene considerate in blocco e le esogene anch'esse prese globalmente.

---

2 Si veda il saggio di Strotz e Wold (1960) che costituisce il primo di un famoso "trittico" di lavori sulla causalità, pubblicati contemporaneamente. In realtà il contributo del Wold all'impostazione ivi descritta è superiore a quello dello Strotz. Nella sostanza essa era presente in Wold (1952).

3.4 Forma ridotta generale dei modelli lineari deterministici

Nel paragrafo 2.5 di questo modulo è stata chiamata forma ridotta del modello lineare la forma ottenuta risolvendo il sistema di equazioni strutturali rispetto alle variabili endogene in funzione delle sole esogene. In un modello con g variabili endogene e k esogene la forma generale ridotta è la seguente

$$\begin{cases} y_1 = \pi_{11}x_1 + \pi_{12}x_2 + \ldots + \pi_{1k}x_k \\ y_2 = \pi_{21}x_1 + \pi_{22}x_2 + \ldots + \pi_{2k}x_k \\ \ldots \\ y_g = \pi_{g1}x_1 + \pi_{g2}x_2 + \ldots + \pi_{gk}x_k \end{cases} \tag{3.4.1}$$

che scritta in forma matriciale diventa

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \ldots & \pi_{1k} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \ldots & \pi_{23} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi_{g1} & \pi_{g2} & \ldots & \pi_{gk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_k \end{bmatrix} \tag{3.4.2}$$

vale a dire in forma compatta,

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x} \tag{3.4.3}$$

dove $\mathbf{P}$ è una matrice di parametri π_{ij} di ordine $g \times k$, $\mathbf{y}$ è il vettore delle g endogene ed $\mathbf{x}$ quello delle k esogene.

Risolvendo il sistema (3.1.1) rispetto a c e ad y otteniamo

$$\begin{cases} c = \dfrac{-\beta}{1-\beta}v + \dfrac{\beta}{1-\beta}i + \dfrac{\alpha}{1-\beta} \\ y = \dfrac{-\beta}{1-\beta}v + \dfrac{1}{1-\beta}i + \dfrac{\alpha}{1-\beta} \end{cases} \tag{3.4.4}$$

che è appunto la forma ridotta del modello (3.1.1); in termini matriciali le (3.4.4) si scrivono

$$\begin{bmatrix} c \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\beta}{1-\beta} & \dfrac{\beta}{1-\beta} & \dfrac{\alpha}{1-\beta} \\ \dfrac{-\beta}{1-\beta} & \dfrac{1}{1-\beta} & \dfrac{\alpha}{1-\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta} \begin{bmatrix} -\beta & \beta & \alpha \\ -\beta & 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.5}$$

dove nella matrice $\mathbf{P}$ dell'ultimo membro si è posto in evidenza il fattore $1/(1-\beta)$ utilizzando l'operazione di moltiplicazione di una matrice per uno scalare.

Anche il sistema (3.2.4) può essere facilmente risolto rispetto alle endogene c, i, y, inserendo il valore di c della prima equazione nella terza e quindi il valore di y di questa nella seconda; si risolve questa rispetto ad i, poi si calcola y in funzione del valore trovato per i e quindi si ottiene c.

In conclusione la forma ridotta del sistema (3.2.4) è

$$\begin{cases} c = \dfrac{1}{1-\beta-\varepsilon}\left[\alpha(1-\varepsilon)+\beta\gamma-\beta(1-\varepsilon)v+\beta g+\beta\delta\exp r\right] \\ i = \dfrac{1}{1-\beta-\varepsilon}\left[\alpha\varepsilon+\gamma(1-\beta)-\varepsilon\beta v+\varepsilon g+\delta(1-\beta)\exp r\right] \\ y = \dfrac{1}{1-\beta-\varepsilon}\left[\alpha+\gamma-\beta v+g+\delta\exp r\right] \end{cases} \tag{3.4.6}$$

che scritta in termini matriciali diventa

$$\begin{bmatrix} c \\ i \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta-\varepsilon}\begin{bmatrix} \beta\delta & \beta & -\beta(1-\varepsilon) & \alpha(1-\varepsilon)+\beta\gamma \\ \delta(1-\beta) & \varepsilon & -\varepsilon\beta & \alpha\varepsilon+\gamma(1-\beta) \\ \delta & 1 & -\beta & \alpha+\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \exp r \\ g \\ v \\ i \end{bmatrix} \tag{3.4.7}$$

dove nella matrice $\mathbf{P}$ si è posto in evidenza il fattore $1/(1-\beta-\varepsilon)$.

3.5 I moltiplicatori nei sistemi statici

Nei semplici modelli di tipo keynesiano (3.1.1) e (3.2.4) è facile vedere come variazioni di una variabile influiscano sulle altre variabili qualora le prime siano supposte causare le seconde: queste relazioni tra variazioni permettono di studiare, ad esempio, politiche alternative di spesa, oppure di carattere fiscale o monetario da parte delle autorità di governo. Consideriamo in primo luogo un modello (3.1.1) la cui forma ridotta è data dalle equazion1 (3.4.4): da queste si trae che le variazioni del reddito e del consumo in funzione di una variazione delle spese autonome i sono date da

$$\Delta y = \frac{1}{1-\beta}\Delta i \qquad \Delta c = \frac{\beta}{1-\beta}\Delta i \tag{3.5.1}$$

dove i fattori di proporzionalità $(1-\beta)^{-1} > 0$ e $\beta(1-\beta)^{-1} > 0$ sono i noti *moltiplicatori* del reddito e del consumo in una economia chiusa e in assenza di imposizione fiscale sul reddito[3].

Considerando, d'altro canto, il modello (3.2.4) si trova facilmente che i moltiplicatori del reddito, del consumo e degli investimenti sono costituiti, utilizzando l'equazione (3.4.6), dagli elementi della matrice $\mathbf{P}$, fornita dalla (3.4.7). In altre parole è

$$\pi_{ij} = \Delta y_i / \Delta x_j \tag{3.5.2}$$

e la $\mathbf{P}$ può essere chiamata *matrice dei moltiplicatori*.

La determinazione della matrice dei moltiplicatori

L'equazione matriciale (3.2.2) può essere risolta come nel par. XIX-1.6 premoltiplicandola a sinistra e a destra per $\mathbf{B}^{-1}$, ottenendosi

$$\mathbf{y} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x} \tag{3.5.3}$$

Questa esprime la forma ridotta del sistema (3.2.2) che invece è scritto in forma strutturale; confrontando la (3.5.3) con la (3.4.3) si ottiene

3 In questo esempio si comparano gli effetti sui valori di equilibrio delle variabili endogene dovuti a variazioni di una variabile esogena. Dato che il modello sottostante, cioè il (3.1.1) è statico, perché in esso figurano solo variabili associate al medesimo intervallo temporale (si veda il par. 2.2), esso non descrive il sentiero di transizione del sistema fra due equilibri successivi. Poiché si compara una situazione statica di equilibrio con un'altra, l'analisi relativa è detta, come è ben noto, di *statica comparata* e fornisce indicazioni utili a un'analisi economica di medio-lungo periodo.

$$\mathbf{P} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{G} \tag{3.5.4}$$

attraverso la quale si possono determinare gli elementi di $\mathbf{P}$ (i moltiplicatori) mediante il prodotto di $\mathbf{B}^{-1}$ per $\mathbf{G}$.

Costituisce un utile esercizio la verifica della (3.5.4) nel caso dei due sistemi (3.1.1) e (3.2.4). La matrice $\mathbf{B}$ del sistema (3.1.1) è esposta nella (3.2.3)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

con determinante $1-\beta$ e matrice aggiunta

$$agg\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}'$$

L'inversa è allora

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{1-\beta}\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

per cui, prendendo $\mathbf{G}$ dalla (3.2.3),

$$-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{G} = -\frac{1}{1-\beta}\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta & 0 & -\alpha \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta}\begin{bmatrix} -\beta & \beta & \alpha \\ -\beta & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

identica alla matrice $\mathbf{P}$ riportata nella (3.4.5).

D'altro canto, la matrice $\mathbf{B}$ del sistema (3.2.4) è esposta nella (3.2.6)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & -\varepsilon \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5.5}$$

con determinante $1-\beta-\varepsilon$ e matrice aggiunta

$$agg\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \beta & 1-\beta & 1 \\ \beta & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}' \tag{3.5.6}$$

L'inversa è allora

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{1-\beta-\varepsilon}\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \beta & \beta \\ \varepsilon & 1-\beta & \varepsilon \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

per cui, prendendo **G** dalla (3.2.6)

$$
-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}=\frac{1}{1-\beta-\varepsilon}\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \beta & \beta\\ \varepsilon & 1-\beta & \varepsilon\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \beta & -\alpha\\ -\delta & 0 & 0 & -\gamma\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}=
$$

$$
=\frac{1}{1-\beta-\varepsilon}\begin{bmatrix}\beta\delta & \beta & -\beta(1-\varepsilon) & \alpha(1-\varepsilon)+\beta\gamma\\ \delta(1-\beta) & \varepsilon & -\varepsilon\beta & \alpha\varepsilon+\gamma(1-\beta)\\ \delta & 1 & -\beta & \alpha+\gamma\end{bmatrix}
$$

identica alla matrice **P** riportata nella (3.4.7).

3.6 Esercizi

3.1 - Si scrivano in forma matriciale, strutturale e ridotta, i modelli (2.3.1) e (2.3.5), nonché quello dell'esercizio 2.4.

3.2 - Si verifichi la relazione (3.5.3) per i modelli (2.2.7) e (2.2.9) nonché per quello dell'esercizio 2.4.

3.3 - Si calcolino il determinante e la matrice aggiunta della $\mathbf{B}$ definita dalla (3.5.5).

3.7 Riferimenti bibliografici

Wold, H. [1952], *Demand Analysis*, in collab. con L. Jurèen, Stoccolma: Almqvist e Wicksell; trad. it *Analisi della domanda – Uno studio di econometria*, Milano: Feltrinelli, 1966.

Wold, H. [1954], "Causality and econometrics", *Econometrica*, **22**, pp. 162-177.

Strotz, R.H., Wold, H. [1960], "Recursive vs. nonrecursive systems: an attempt at synthesis", *Econometrica*, **28**, pp. 417-427.